

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS (MENTION SCIENCES)

PAR

ROGER MICHEL

1^{re} THÈSE

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES COUCHES LIMITES TURBULENTES
AVEC GRADIENT DE PRESSION

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

CORRECTIONS D'EFFET BOUCHON EN SOUFFLERIES AÉRODYNAMIQUES

Soutenues le 24 février 1950 devant la Commission d'Examen

Jury	{	MM. PÉRÈS	}	Président.
		TOUSSAINT		Examineurs.
		FORTIER		

1951



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552427_0004

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS (MENTION SCIENCES)

PAR

ROGER MICHEL

1^{re} THÈSE

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES COUCHES LIMITES TURBULENTES
AVEC GRADIENT DE PRESSION

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

CORRECTIONS D'EFFET BOUCHON EN SOUFFLERIES AÉRODYNAMIQUES

Soutenues le 24 février 1950 devant la Commission d'Examen

<i>Jury</i> {	MM. PÉRÈS	{	<i>Président.</i>
	TOUSSAINT		<i>Examineurs.</i>
	FORTIER		

THESE

ETUDE DE LA MANIÈRE
DE L'ÉCRIVAIN DE LA

MANIÈRE

DE LA MANIÈRE DE L'ÉCRIVAIN DE LA

MANIÈRE



MANIÈRE DE L'ÉCRIVAIN DE LA

MANIÈRE

MANIÈRE DE L'ÉCRIVAIN DE LA

MANIÈRE DE L'ÉCRIVAIN DE LA

MANIÈRE DE L'ÉCRIVAIN DE LA

MANIÈRE

MANIÈRE

MANIÈRE

MANIÈRE

MANIÈRE

CONTRIBUTION

A L'ÉTUDE DES COUCHES LIMITES TURBULENTES

AVEC GRADIENT DE PRESSION

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen M. A. CHATELET

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et algèbre supérieure.	H. CARTAN	T	Mathématiques générales.
A. DENJOY	T	Théorie des fonctions.	SCHAEFFER	T	Physiologie des fonctions.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et géologie dynamique.	LAFFITTE	T	Chimie (P.C.B.).
E. DARMOIS	T	Enseignement de physique.	FAVARD		Calcul des probabilités et physique-mathématique.
Robert LÉVY	T	Physiologie comparée.	COULOMB	T	Physique du globe.
Henri VILLAT	T	Mécanique des fluides et applications.	M ^{lle} COUSIN	T	Biologie animale (P.C.B.).
Ch. JACOB	T	Géologie.	CHRÉTIEN		Chimie (P.C.B.).
P. PASCAL	T	Chimie générale.	P. DRACH		Zoologie.
M ^{me} RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.	KASTLER		Physique.
FOCH	T	Mécanique physique et expérimentale.	CHATELET	T	Arithmétique et théorie des nombres.
PAUTHENIER	T	Électrotechnique générale.	EPHRUSSI	T	Génétique.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.	WURMSER	T	Biologie physico-chimique.
JOB	T	Chimie générale.	BAUER	T	Chimie-physique.
PRENANT	T	Anatomie et histologie comparées.	RIVIÈRE		Géologie (P.C.B.).
COMBES	T	Physiologie végétale.	GAUTHERET		Biologie végétale (P.C.B.).
GARNIER	T	Géométrie supérieure.	LUCAS		Physique.
PÉRÈS	T	Mécanique rationnelle.	A. THOMAS		Évolution des êtres organisés.
HACKSPILL	T	Chimie minérale.	ARNULF		Optique appliquée.
LAUGIER	T	Physiologie générale.	Max MORAND		Physique.
TOUSSAINT	T	Technique aéronautique.	SOLEILLET		Physique.
M. CURIE	T	Physique (P.C.B.).	FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.
G. RIBAUD	T	Hautes températures.	DANJON	T	Astronomie.
CHAZY	T	Mécanique analytique et mécanique céleste.	FROMAGEOT		Chimie biologique.
CROZE	T	Physique théorique et physique céleste.	LAPORTE		Physique générale et radio-activité.
DUPONT	T	Théories chimiques.	JANET		Mathématiques générales.
VALIRON	T	Calcul différentiel et calcul intégral.	PETIT	T	Biologie maritime.
BARRABÉ	T	Géologie structurale et géologie appliquée.	QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
VAYON	T	Analyse et mesures chimiques.	GALLIEN		Biologie animale (P.C.B.).
G. DARMOIS	T	Calcul des probabilités et physique mathématique.	EICHHORN		Biologie végétale (P.C.B.).
Jacques BOURCART		Géographie physique et géologie dynamique.	DE CUGNAC		Biologie végétale (P.C.B.).
AUBEL	T	Chimie biologique.	LAVAL		Physique (P.C.B.).
M ^{me} JOLIO-CURIE	T	Physique générale et radio-activité.	M ^{lle} CAUCHOIS		Chimie-physique.
PLANTEFOL	T	Botanique.	THELLIER		Physique du globe.
CABANNES	T	Recherches physiques.	AUDUBERT		Électrochimie.
GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés.	L'HÉRITIER		Génétique.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	GRIVET	T	Radio-électricité.
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la géométrie.	PONCIN		Mécanique des fluides.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	THIRY	T	Mécanique appliquée.
WYART	T	Minéralogie.	DUBREIL		Mathématiques générales.
TEISSIER	T	Zoologie.	QUELET		Chimie (P.C.B.).
MANGENOT	T	Biologie végétale.	CAGNIARD		Géophysique appliquée.
P. AUGER	T	Physique quantique et relativité.	CHAMPETIER		Chimie appliquée.
MONNIER		Physiologie générale.	CUVILLIER		Géologie structurale et géologie appliquée.
PIVETEAU	T	Géologie.	JUNG		Pétrographie.
ROCARD	T	Physique.	TRILLAT		Physique (P.C.B.).
			WIEMANN		Chimie (P.C.B.).
			LICHNEROWICZ		Mathématiques.
			JACQUINOT		Physique.
			VASSY		Physique de l'atmosphère.
			DESTOUCHES		Théories physiques.

Secrétaire Ch. MONIER

Je tiens à exprimer ma reconnaissance la plus profonde à M. le Professeur TOUSSAINT, Directeur de l'Institut Aérotechnique de Saint-Cyr, grâce à qui j'ai pu entreprendre ce travail, pour le soutien constant de sa Science et de son Expérience approfondies de l'Aérodynamique, en même temps que des ressources incomparables du Laboratoire de Saint-Cyr.

J'adresse encore mes remerciements les plus sincères :

— à M. Frédéric GRUSON, Sous-Directeur de l'Institut, qui ne voulut jamais ménager son temps et ses conseils précieux dans ces discussions si fertiles;

— à Maurice MÉNARD et à tous mes collègues et amis de Saint-Cyr pour la compréhension et la sympathie si réconfortantes qu'ils m'ont toujours témoignées;

— au Personnel ouvrier et notamment aux menuisiers de l'Institut Aérotechnique, par qui furent réalisés avec tant de soin et de compétence le matériel et les montages nécessités par ces recherches.

TABLE DES MATIÈRES

	PAGES
INTRODUCTION	1
NOTATIONS	3
PREMIÈRE PARTIE	
Généralités sur les couches limites turbulentes	5
DEUXIÈME PARTIE	
Les couches limites de la plaque plane à distribution de vitesse et pression constantes	11
CHAPITRE PREMIER. — Résultats sur la plaque plane sans gradient de pression ..	11
CHAPITRE II. — Partie expérimentale sur la plaque plane sans gradient	30
CHAPITRE II A. — Matériel expérimental	31
CHAPITRE II B. — Essais effectués et résultats expérimentaux	38
CHAPITRE II C. — Discussion des résultats	42
TROISIÈME PARTIE	
Les couches limites turbulentes à répartition de vitesse et pression potentielle variables	47
CHAPITRE PREMIER. — Généralités sur les couches limites turbulentes avec gradients de pression	47
CHAPITRE II. — Etudes antérieures	49
CHAPITRE III. — Partie expérimentale sur les couches limites turbulentes avec gradients	61
CHAPITRE III A. — Essais sur la plaque	62
CHAPITRE III B. — Essais sur profils	65
CHAPITRE III C. — Discussion des résultats	70
CHAPITRE IV. — Exploitation de nos résultats pour le calcul de l'épaisseur de quantité de mouvement	74
CHAPITRE IV A. — Première méthode de calcul de l'épaisseur de quantité de mouvement	75
CHAPITRE IV B. — Deuxième méthode de calcul de l'épaisseur de quantité de mouvement	81
CHAPITRE V. — Calcul du paramètre de forme et de l'épaisseur de déplacement ..	92
CHAPITRE VI. — Exposé et examen généraux de notre méthode de calcul des couches limites	106
APPENDICE. — Calcul des coefficients de frottement locaux	128

INTRODUCTION

Le calcul de la résistance de profil d'une aile nécessite la connaissance de l'évolution des couches limites tout le long de la paroi.

Le but de ce travail est la prédétermination des caractéristiques de la partie turbulente des couches limites ce qui nous conduira à étudier d'une façon générale les couches limites turbulentes à distributions de vitesses et pressions potentielles variables.

Si les couches limites turbulentes à vitesse et pression potentielles constantes (couches limites de la plaque plane) sont assez bien connues, la prévision de l'évolution d'une couche limite turbulente avec gradients de pression est un problème beaucoup plus complexe.

Différentes méthodes ont été proposées.

Certaines, comme la méthode SQUIRE-YOUNG, ne font appel du point de vue expérimental qu'aux résultats sur la plaque plane.

D'autres, comme la méthode GRUSCHWITZ, s'aident de résultats expérimentaux sur les couches turbulentes avec gradients de pression elles-mêmes, résultats qui permettent de modifier par des approximations successives les résultats de la plaque plane et d'aboutir au calcul exact des couches limites avec gradients de pression.

Un calcul rigoureux des couches limites turbulentes à pressions potentielles variables ne pourra se passer de constatations expérimentales préalables.

Or, si l'on observe les résultats expérimentaux utilisés dans les méthodes existantes, on constate qu'ils consistent en des relations entre des paramètres renfermant tous une inconnue du problème, ce qui conduit à ajouter à l'équation des quantités de mouvement une deuxième équation et à résoudre le système obtenu, ce qui nécessite un calcul par approximations successives dans de nombreux cas, et présente alors l'inconvénient d'être long.

Il nous a donc semblé intéressant de rechercher par l'expérience une relation éventuelle entre une quantité inconnue, caractéristique de la couche limite, et une quantité connue caractéristique de l'écoulement potentiel, de manière à en tirer une méthode plus directe.

Nous nous bornerons à l'étude du mouvement plan; l'influence de la rugosité ne sera pas non plus abordée : nous n'aurons affaire qu'à des parois aérodynamiquement lisses.

Nous supposerons connus les résultats de la couche limite laminaire et par conséquent l'état de la couche limite au point de transition.

Le plan de notre travail s'établira alors ainsi :

Nous commencerons par revoir la théorie des couches limites turbulentes et les résultats sur la plaque plane sans gradients, résultats que nous essayerons de confirmer par l'expérience.

Nous exposerons et discuterons ensuite les différentes méthodes existantes de calcul des couches limites turbulentes avec gradients de pression, puis donnerons les résultats de nos propres expériences et les relations et méthodes de calcul que nous pourrons en tirer.

NOTATIONS

ρ masse spécifique de l'air.

μ coefficient de viscosité.

ν coefficient de viscosité cinématique : $\nu = \frac{\mu}{\rho}$.

x ou s distance d'un point considéré, parallèlement à la paroi, à une origine précisée dans chaque cas.

y distance d'un point considéré à la paroi.

V_0 vitesse à l'infini-amont dans le cas des profils ou vitesse de référence à préciser dans les autres cas.

V vitesse à la frontière supérieure de la couche limite.

u composante suivant x de la vitesse moyenne en un point de la couche limite.

v composante suivant y de la même vitesse.

p_0 pression statique de l'infini-amont ou de référence.

p pression statique potentielle : c'est la pression à la frontière de la couche limite; elle se conserve à travers la couche limite à l'abscisse x considérée.

P_{t_0} pression totale de l'infini-amont; c'est aussi la pression totale régnant dans tout le domaine fluide extérieur aux couches limites et au sillage.

P_t pression totale en un point de la couche limite.

On a les relations :

$$P_{t_0} = p_0 + \frac{\rho}{2} V_0^2 = p + \frac{\rho}{2} V^2$$

$$P_t = p + \frac{\rho}{2} u^2.$$

u' composante suivant x de la fluctuation de vitesse.

v' composante suivant y de la fluctuation de vitesse.

δ épaisseur de la couche limite $u = V$ en $y = \delta$.

δ^* épaisseur de déplacement : $\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{V}\right) dy$.

δ^{**} épaisseur de quantité de mouvement.

H paramètre de forme $H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$.

τ frottement par unité de surface entre deux couches fluides voisines.

τ_0 frottement à la paroi.

l longueur de mélange de PRANDLT.

ε coefficient de viscosité apparente due à la turbulence.

PREMIÈRE PARTIE

GÉNÉRALITÉS

SUR LES

COUCHES LIMITES TURBULENTES

1. Les équations générales.

Les équations du mouvement plan permanent d'un fluide visqueux incompressible, appliquées aux couches limites, s'écrivent, après simplifications :

$$(1) \quad \begin{aligned} a \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

τ étant le frottement par unité de surface entre deux couches voisines de fluide.

En écoulement laminaire $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$.

En écoulement turbulent, un terme d'agitation doit s'ajouter et l'on a :

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{\rho u'v'} \quad (\text{voir § 2}).$$

A ces équations il convient d'ajouter l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

D'autre part, le théorème des quantités de mouvement, appliqué par KARMAN aux couches limites, permet d'établir l'équation différentielle servant de départ à presque tous les calculs sur les couches limites.

Nous n'avons pas cru inutile d'en donner une démonstration et nous avons choisi celle de M. GIQUEAUX (référence 1).

Cette démonstration consiste simplement à intégrer l'équation 1(a) par rapport à y :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}.$$

Intégrons entre $y = 0$ et $y = y_1 = \delta$ épaisseur de la couche limite.

On a puisque : $\frac{dp}{dx} = -\rho V \frac{dV}{dx}$:

$$\int_0^{y_1} V \frac{dV}{dx} dy = \int_0^{y_1} u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{y_1} v \frac{\partial u}{\partial y} dy - \frac{1}{\rho} \int_0^{y_1} \frac{\partial \tau}{\partial y} dy$$

$$\text{en } y = y_1 \quad \tau = 0; \quad \text{en } y = 0 \quad \tau = \tau_0$$

$$\int_0^{y_1} V \frac{dV}{dx} dy = \int_0^{y_1} u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{y_1} v \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\tau_0}{\rho}.$$

On a d'autre part :

$$\int v \frac{\partial u}{\partial y} dy = uv - \int u \frac{\partial v}{\partial y} dy \text{ et } - \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

donc :

$$\int_0^{y_1} v \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int_0^{y_1} uv dy + \int_0^{y_1} u \frac{\partial u}{\partial x} dy : \text{ en } y = y_1 \quad u = V \quad v = v(y_1)$$

$$\int_0^{y_1} v \frac{\partial u}{\partial y} dy = Vv(y_1) + \int_0^{y_1} u \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

$$v(y_1) = \int_0^{y_1} \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad \int_0^{y_1} v \frac{\partial u}{\partial y} dy = V \int_0^{y_1} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{y_1} u \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \int_0^{y_1} V \frac{dV}{dx} dy = \int_0^{y_1} u \frac{\partial u}{\partial x} dy + V \int_0^{y_1} \frac{\partial u}{\partial x} dy = \int_0^{y_1} V \frac{dV}{dx} dy = \int_0^{y_1} u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{y_1} V \frac{dV}{dx} dy + V \int_0^{y_1} \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d}{dx} \int_0^{y_1} (V^2 - u^2) dy = V \frac{d}{dx} \int_0^{y_1} (V - u) dy.$$

Pour $y \geq \delta$, $V = u$, les limites d'intégration peuvent être ramenées à δ et l'on a :

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (V^2 - u^2) dy = V \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (V - u) dy.$$

On écrira encore :

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{\tau_0}{\rho} &= \frac{d}{dx} \left[V^2 \int_0^\delta \left(1 - \frac{u^2}{V^2} \right) dy \right] - V \frac{d}{dx} \left[V \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{V} \right) dy \right] \\
 \frac{\tau_0}{\rho} &= \frac{d(V^2)}{dx} \int_0^\delta \left(1 - \frac{u^2}{V^2} \right) dy + V^2 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \left(1 - \frac{u^2}{V^2} \right) dy - V^2 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{V} \right) dy - V \frac{dV}{dx} \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{V} \right) dy \\
 &= V \frac{dV}{dx} \int_0^\delta \left(2 \left(1 - \frac{u^2}{V^2} \right) - \left(1 - \frac{u}{V} \right) \right) dy + V^2 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{V} \right) dy.
 \end{aligned}$$

En posant alors :

$$\begin{aligned}
 \delta^* &= \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{V} \right) dy \quad \text{et} \quad \delta^{**} = \int_0^\delta \frac{u}{V} \left(1 - \frac{u}{V} \right) dy, \\
 (3) \quad \frac{\tau_0}{\rho V^2} &= \frac{1}{V} \frac{dV}{dx} [\delta^* + 2\delta^{**}] + \frac{d\delta^{**}}{dx}
 \end{aligned}$$

que l'on peut écrire sous les différentes formes suivantes :

$$(3a) \quad \frac{\tau_0}{\rho V^2} = \frac{d\delta^{**}}{dx} - \frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\rho V^2} (\delta^* + 2\delta^{**})$$

$$(3b) \quad \frac{\tau_0}{\rho V^2} = \frac{d\delta^{**}}{dx} - \frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\rho}{2} V^2} \left(\frac{H+2}{2} \right) \delta^{**}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{avec } H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \\
 (3c) \quad \frac{\tau_0}{\rho V^2} &= \frac{d\delta^{**}}{dx} + (H+2) \frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx}
 \end{aligned}$$

δ^* est « l'épaisseur de déplacement » ; elle caractérise la perte de débit due à la présence de la couche limite :

$$V\delta^* = \int_0^\delta (V-u) dy \quad \delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{V} \right) dy$$

Du point de vue du débit tout se passe comme si l'on avait, au lieu de la couche limite, une zone à vitesse uniforme V s'étendant jusqu'à une paroi fictive qui serait la paroi réelle engraissée de l'épaisseur de déplacement.

δ^{**} est l'épaisseur de quantité de mouvement ; elle caractérise la quantité de mouvement correspondant à cette perte de débit :

$$\rho V^2 \delta^{**} = \int_0^\delta u(V-u) dy \quad \delta^{**} = \int_0^\delta \frac{u}{V} \left(1 - \frac{u}{V} \right) dy$$

2. Théorie de Prandtl-Karman pour le frottement turbulent.

En régime laminaire, il est admis que les actions tangentielles entre deux couches voisines de fluide sont dues au transfert de quantité de mouvement d'une couche à l'autre par le phénomène de l'agitation moléculaire.

Selon la théorie de PRANDTL et selon celle de KARMAN le frottement en régime turbulent sera dû également à des transferts de quantité de mouvement, mais à une échelle totalement différente : ces transferts de quantité de mouvement proviendront des fluctuations de la vitesse locale.

En tout point du fluide, vitesse et pression comportent des fluctuations désordonnées et la vitesse et la pression instantanée peuvent s'écrire :

$$u_i = \bar{u} + u'; \quad v_i = \bar{v} + v'; \quad p_i = \bar{p} + p';$$

$\bar{u}$, $\bar{v}$ et $\bar{p}$ sont les valeurs moyennes de u , v et p pendant un intervalle de temps suffisant :

$$u = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u_i dt \text{ et de même pour } \bar{v} \text{ et } \bar{p}$$

u' , v' et p' sont les fluctuations de vitesse et de pression.

Les fluctuations de vitesse u' et v' apporteront dans les couches fluides voisines la quantité de mouvement $\rho \overline{u'v'}$. Il en résultera une action tangentielle $-\rho \overline{u'v'}$ que l'on devra ajouter au frottement dû à la viscosité et le frottement total par unité de surface entre deux couches voisines sera :

$$\tau = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}.$$

A la paroi le terme $\rho \overline{u'v'}$ s'annule, et l'on doit admettre qu'il existe, au voisinage, une mince couche où ce terme est négligeable ; le frottement y suit le processus laminaire, et τ est dû uniquement à la viscosité.

A la paroi même le frottement s'écrit :

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_0.$$

Cette mince couche de fluide est le « film laminaire » qui possède les propriétés d'une véritable couche limite laminaire.

A l'extérieur du film laminaire, c'est au contraire le terme $-\rho \overline{u'v'}$ qui devient prépondérant, tandis que le terme $\mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)$ devient négligeable et l'on a :

$$\tau = -\rho \overline{u'v'}.$$

3. Longueur de mélange.

Par analogie avec la théorie cinétique des gaz, PRANDTL a introduit la « longueur de mélange » analogue du libre parcours moyen des molécules.

Il suppose que les masses de fluide déplacées perpendiculairement au courant moyen portent leur quantité de mouvement invariablement sur une certaine longueur; cette longueur est la longueur de mélange l et le frottement $\tau = \overline{\rho u'v'}$ est égal à $\rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2$.

On écrira encore : $\tau = \rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)$, $\varepsilon = \rho l^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ devenant ainsi l'analogue du coefficient μ dans le frottement dû à la viscosité $\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$.

On a de cette façon défini une « viscosité apparente » qui représente le mécanisme de la turbulence.

4. Évolution de la longueur de mélange l à travers la couche limite.

La théorie de PRANDTL conduit à représenter la variation de la longueur de mélange à travers la couche limite par un polynôme :

$$\frac{l}{\delta} = a_0 + a_1 \frac{y}{\delta} + a_2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + a_3 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3,$$

δ étant l'épaisseur de la couche limite.

A la paroi on doit admettre $u' = v' = 0$

Donc $l = 0$ et $a_0 = 0$.

Les autres coefficients ont été déterminés par NIKURADSE (référence 2) à partir d'essais sur les tuyaux polis et NIKURADSE écrit :

$$\frac{l}{r} = 0,14 - 0,08 \left(1 - \frac{y}{r} \right)^2 - 0,06 \left(1 - \frac{y}{r} \right)^4 = 0,4 \frac{y}{r} - 0,44 \left(\frac{y}{r} \right)^2 + \dots$$

r étant le rayon du tuyau.

Cette formule est admise dans le cas de la plaque plane; certains auteurs l'utilisent même dans le cas d'écoulements avec gradients de pression.

On y remplace simplement r par δ .

5. Évolution du frottement interne.

L'évolution du frottement interne est donnée par FEDIAEWSKY, qui admet d'abord que le rapport $\frac{\tau}{\tau_0}$ peut également se représenter par un polynôme en $\frac{y}{\delta}$ (référence 3) :

$$\frac{\tau}{\tau_0} = A_0 + A_1 \left(\frac{y}{\delta} \right) + A_2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + A_3 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \dots$$

FEDIAEWSKY fait intervenir l'équation :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

pour déterminer les valeurs des coefficients $A_0, A_1, A_2 \dots$ en précisant les conditions aux limites :

$$(I) \quad \tau = \tau_0 \text{ en } y = 0, \quad (II) \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} \text{ en } \frac{y}{\delta} = 0, \quad (III) \quad \tau = 0 \text{ en } \frac{y}{\delta} = 1.$$

FEDIAEWSKY admet en outre :

$$(IV) \quad \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} = 0 \text{ en } y = 0, \quad (V) \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \text{ en } y = \delta,$$

ce qui donne :

en prenant I, II, III, IV, V :

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{\delta}{\tau_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -4 - 3 \frac{\delta}{\tau_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad A_4 = +3 + 2 \frac{\delta}{\tau_0} \frac{\partial p}{\partial x},$$

en prenant I, II, III, IV :

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{\delta}{\tau_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad A_2 = -3 - 2 \frac{\delta}{\tau_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad A_3 = 2 + \frac{\delta}{\tau_0} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

En prenant I, II, III :

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{\delta}{\tau_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad A_2 = -1 - \frac{\delta}{\tau_0} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

DEUXIÈME PARTIE

LES COUCHES LIMITES TURBULENTES DE LA PLAQUE PLANE SANS GRADIENT DE PRESSION

CHAPITRE PREMIER

RÉSULTATS SUR LA PLAQUE PLANE SANS GRADIENT

1. Lois en puissance pour la distribution des vitesses et pour les coefficients de frottement (référence 4).

Les résultats expérimentaux concernant le frottement en régime turbulent pour la plaque plane comme pour le tuyau poli peuvent se représenter par des lois en puissance. On aura ainsi pour la plaque :

$$(1) \quad \frac{\tau_0}{\rho V_0^2} = \frac{C_{te}}{\left(\frac{V_0 \delta}{\nu}\right)^n}$$

δ étant l'épaisseur de la couche limite.

De même, la vitesse moyenne dans la couche limite u sera proportionnelle à une puissance de y distance à la paroi :

$$(2) \quad u = ky^{1/m}.$$

Il est facile de montrer que n et m sont liés par une relation bien établie ; en effet d'après (1) on aura :

$$\delta^n = \frac{C}{\tau_0} \nu^n \rho V_0^{2-n}$$
$$\delta = \nu \left(\frac{C\rho}{\tau_0}\right)^{1/n} V_0^{\frac{2-n}{n}}$$

mais d'après (2) :

$$V_0 = k \delta^{1/m}$$

et :

$$\delta^{1/m} = v^{1/m} \left(\frac{C\rho}{\tau_0} \right)^{1/mn} V_0^{\frac{2-n}{mn}};$$

donc :

$$V_0 = k v^{1/m} \left(\frac{C\rho}{\tau_0} \right)^{1/mn} V_0^{\frac{2-n}{mn}},$$

ce qui détermine la relation entre n et m :

$$(3) \quad \frac{2-n}{mn} = 1 \quad m = \frac{2-n}{n}.$$

La loi de répartition des vitesses exprimera alors le rapport $\frac{u}{V_0}$ en fonction de $\frac{y}{\delta}$:

$$(4) \quad \frac{u}{V_0} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/m}.$$

En ce qui concerne le tuyau poli, il suffira de remplacer δ par r_0 rayon du tuyau, et V_0 par $V_{\max}$.

C'est BLASIUS qui a le premier donné la valeur de la constante n , ceci valant pour les tuyaux polis; on étend ce résultat au cas de la plaque plane :

D'après BLASIUS $n = 1/4$, donc $m = 7$.

BLASIUS donne pour le coefficient de perte de charge dans un tuyau :

$$(5) \quad \lambda = \frac{0,316}{\left(\frac{UD}{\nu} \right)^{1/4}}$$

U étant la vitesse moyenne constante tout le long du tuyau : $U = \frac{Q}{S}$, D diamètre du tuyau, Q débit, S section du tuyau.

La distribution des vitesses est alors : $\frac{u}{V_{\max}} = \left(\frac{y}{r_0} \right)^{1/7}$ et l'on peut relier la vitesse moyenne U à la vitesse au centre :

le débit est en effet :

$$Q = \int_0^{r_0} 2\pi r u \, dr$$

$$Q = 2\pi \int_0^{r_0} (r_0 - y) V_{\max} \left(\frac{y}{r_0} \right)^{\frac{1}{2}} dy$$

$$Q = 2\pi r_0^2 \frac{49}{120} V_{\max} \approx 0,8 \, S V_{\max}$$

donc :

$$(6) \quad U = 0,8 V_{\max}$$

la formule $\lambda = \frac{0,316}{\left(\frac{UD}{\nu}\right)^{\frac{1}{4}}}$ qu'on peut écrire :

$$\frac{\tau_0}{\rho V_{\max}^2} = \frac{\lambda}{8} = \frac{0,0395}{\left(\frac{UD}{\nu}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

donne :

$$\frac{\tau_0}{\rho V_{\max}^2} = \frac{0,0395}{\left(\frac{U}{V_{\max}}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{V_{\max} r_0}{\nu}\right)^{\frac{1}{4}} (2)^{\frac{1}{4}}}$$

or :

$$\frac{U}{V_{\max}} = 0,8$$

donc :

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{0,035}{\left(\frac{V_{\max} r_0}{\nu}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\frac{\tau_0}{\rho V_{\max}^2} = 0,64 \frac{\tau_0}{\rho U^2}$$

$$\frac{\tau_0}{\rho V_{\max}^2} = \frac{0,0225}{\left(\frac{V_{\max} r_0}{\nu}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

qui devient dans le cas de la plaque :

$$(7) \quad \frac{\tau_o}{\rho V_o^2} = \frac{0,0225}{\left(\frac{V_o \delta}{\nu}\right)^{1/4}}.$$

Cette formule est assez bien vérifiée par l'expérience mais nous préférons lui donner d'autres formes, vu la difficulté de déterminer l'épaisseur δ expérimentalement d'une façon précise; nous calculerons d'abord les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement dans le cas d'une loi en puissance pour la répartition des vitesses : si, d'une façon générale $\frac{u}{V_o} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/m}$ on a :

$$(8) \quad \begin{aligned} \delta^{**} &= \int_0^{\delta} \frac{u}{V_o} \left(1 - \frac{u}{V_o}\right) dy = \delta \int_0^1 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/m} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/m}\right] d\left(\frac{y}{\delta}\right) \\ \delta^* &= \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{V_o}\right) dy = \delta \int_0^1 \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/m}\right] d\left(\frac{y}{\delta}\right) \\ \delta^* &= \delta \frac{1}{m+1}; \end{aligned}$$

$$(8 \text{ bis}) \quad \delta^{**} = \delta \frac{m}{(m+1)(m+2)}.$$

Pour la plaque plane $m=7$; $\delta^* = \frac{1}{8} \delta$, $\delta^{**} = \frac{7}{72} \delta$, la formule (7) peut alors s'écrire :

$$(9) \quad \frac{\tau_o}{\rho V_o^2} = \frac{0,0225}{\left(\frac{V_o \delta^{**}}{\nu}\right)^{1/4} \left(\frac{\delta}{\delta^{**}}\right)^{1/4}}; \quad \frac{\tau_o}{\rho V_o^2} = \frac{0,01255}{\left(\frac{V_o \delta^*}{\nu}\right)^{1/4}}.$$

Nous pourrions encore exprimer $\frac{\tau_o}{\rho V_o^2}$ en fonction du nombre de Reynolds $R_x = \frac{V_o x}{\nu}$ (1).

L'équation des quantités de mouvement s'écrit dans le cas de la plaque plane :

$$\frac{\tau_o}{\rho V_o^2} = \frac{d\delta^{**}}{dx}$$

donc d'après (9)

$$\begin{aligned} \frac{d\delta^{**}}{dx} &= \frac{0,01255}{\left(\frac{V_o}{\nu}\right)^{1/4} \delta^{**1/4}} \\ \frac{d\delta^{**}}{dx} \delta^{**1/4} &= \frac{0,01255}{\left(\frac{V_o}{\nu}\right)^{1/4}} \end{aligned}$$

(1) x distance à l'origine de la couche limite turbulente.

et en intégrant entre 0 et x

$$\frac{4}{5} \delta^{**\frac{5}{4}} = \frac{0,01255}{\left(\frac{V_o}{\nu}\right)^{\frac{1}{4}}} x$$

$$\delta^{**} = \frac{(0,01255)^{\frac{4}{5}} \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{4}{5}}}{\left(\frac{V_o}{\nu}\right)^{\frac{1}{5}}} x^{\frac{4}{5}}$$

$$(10) \quad \frac{\delta^{**}}{x} = \frac{0,036}{\text{Re}^{\frac{1}{5}}}$$

Or :

$$\frac{\tau_o}{\rho V_o^2} = \frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\frac{0,036}{\left(\frac{V_o}{\nu}\right)^{\frac{1}{5}}} x^{\frac{4}{5}} \right] = \frac{4}{5} \frac{\delta^{**}}{x}$$

$$\frac{\tau_o}{\rho V_o^2} = \frac{0,0288}{\text{Re}^{\frac{1}{5}}}$$

$$(11) \quad cf = \frac{\tau_o}{\frac{\rho}{2} V_o^2} = \frac{0,0576}{\text{Re}^{\frac{1}{5}}}$$

Le coefficient de frottement global est :

$$Cf = \frac{1}{x} \int_0^x cf \, dx = \frac{1}{x} \int_0^x 2 \frac{d\delta^{**}}{dx} \, dx = 2 \frac{\delta^{**}}{x}$$

$$(11 \text{ bis}) \quad Cf = \frac{0,072}{\text{Re}^{\frac{1}{5}}}$$

En résumé, on peut représenter, pour la plaque plane sans gradient de pression, la distribution des vitesses dans la couche limite ainsi que les coefficients de frottement par des lois en puissance.

1. La répartition des vitesses peut se représenter par la loi :

$$\frac{u}{V_o} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Les profils de vitesses sont semblables c'est-à-dire que la courbe $\frac{u}{V_o} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$ est unique.

Le paramètre de forme $H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$ est constant = 1,285.

2. Les différentes épaisseurs peuvent se représenter par les lois en puissance suivantes :

$$\frac{\delta^{**}}{x} = \frac{0,036}{\text{Rx}^{\frac{1}{5}}}; \quad \frac{\delta^*}{x} = \frac{0,0462}{\text{Rx}^{\frac{1}{5}}}; \quad \frac{\delta}{x} = \frac{0,37}{\text{Rx}^{\frac{1}{5}}}.$$

3. Les coefficients de frottement seront alors : coefficient de frottement local :

$$cf = \frac{0,0251}{\left(\frac{V\delta^{**}}{\nu}\right)^{\frac{1}{4}}} = \frac{0,0576}{\text{Rx}^{\frac{1}{5}}} \text{ (voir fig. 1);}$$

coefficient de frottement global :

$$Cf = \frac{0,072}{\text{Rx}^{\frac{1}{5}}}.$$

2. Représentations logarithmiques de Karman Nikuradsé (références 5 et 6).

Ces représentations logarithmiques, pour la distribution des vitesses et pour le frottement sont basées sur une première constatation expérimentale faite par NIKURADSÉ, dans le cas des tuyaux polis, à savoir :

Le rapport $\frac{V_{\max} - u}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}}$ est fonction uniquement de $\frac{y}{r_0}$, la quantité $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ est homogène

à une vitesse, et sera dénommée vitesse de frottement u^* .

On a donc : $\frac{V_{\max} - u}{u^*} = f\left(\frac{y}{r_0}\right)$, f étant une fonction universelle donnée par NIKURADSÉ :

$$\frac{V_{\max} - u}{u^*} = 5,75 \log_{10} \frac{r_0}{y}.$$

Cette représentation n'est évidemment pas valable au voisinage immédiat de la paroi : il existe dans cette région un « film laminaire » d'épaisseur δ_l dans lequel on admettra que la vitesse est proportionnelle à la distance à la paroi y .

Si $u\delta_l$ est la vitesse en $y = \delta_l$ on aura :

$$\tau_0 = \mu \frac{u\delta_l}{\delta_l}$$

d'où :

$$\frac{u\delta_l}{\delta_l} = \frac{u^{*2}}{\nu}$$

on admettra encore que le rapport $\frac{u\delta_l}{u^*}$ est constant : $\frac{u\delta_l}{u^*} = N$. En $y = \delta_l$ la loi logarithmique est valable et l'on a :

$$\frac{V_{\max} - u\delta_l}{u^*} = 5,75 \frac{r_o}{\delta_l} = 5,75 \log \frac{r_o}{u^*} \frac{u\delta_l}{\delta_l} \frac{u^*}{u\delta_l}$$

$$\frac{V_{\max}}{u^*} - N = 5,75 \log \frac{1}{N} + 5,75 \log \frac{u^* r_o}{v}$$

$$\frac{V_{\max}}{u^*} = A + 5,75 \log \frac{u^* r_o}{v},$$

et NIKURADSE précise la valeur de la constante N : 0,55. On a alors :

$$\frac{u}{u^*} = 5,5 + 5,75 \log \frac{u^* y}{v}.$$

En faisant le débit $Q = \int_0^R 2\pi r u dr$ et divisant par πr_o^2 pour obtenir la vitesse moyenne U

on trouve :

$$\frac{U}{u^*} = 1,43 + 5,75 \log \frac{u^* r_o}{v}.$$

Or :

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \quad \frac{U}{u^*} = \sqrt{\frac{2}{cf}}$$

on a donc :

$$\sqrt{\frac{2}{cf}} = 1,43 + 5,75 \log R_0 \sqrt{cf} - 5,75 \log \sqrt{2} \text{ avec } R_0 = \frac{U r_o}{v}$$

et finalement :

$$\frac{1}{\sqrt{cf}} = 0,4 + 4,05 \log R_0 \sqrt{cf}.$$

KARMAN a donné une théorie confirmant ces résultats.

Partant de la relation $\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^n$ et postulant que, au voisinage de la paroi, la longueur de mélange se réduit à son premier terme $l = ky$ on aura :

$$\tau_o = \rho k^2 y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

d'où, en intégrant par rapport à y :

$$u = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left(\text{const.} + \frac{1}{k} \log_v y \right)$$

$$\frac{u}{u^*} = \text{const.} + \frac{1}{k} \log_e y = a + \frac{2,3}{k} \log_{10} \frac{u^* y}{\nu}$$

et, puisque $k = 0,40$:

$$\frac{u}{u^*} = a + 5,75 \log_{10} \frac{u^* y}{\nu}$$

La formule finalement proposée par KARMAN est :

$$\frac{1}{\sqrt{cf}} = 0,36 + 4,15 \log R_0 \sqrt{cf}$$

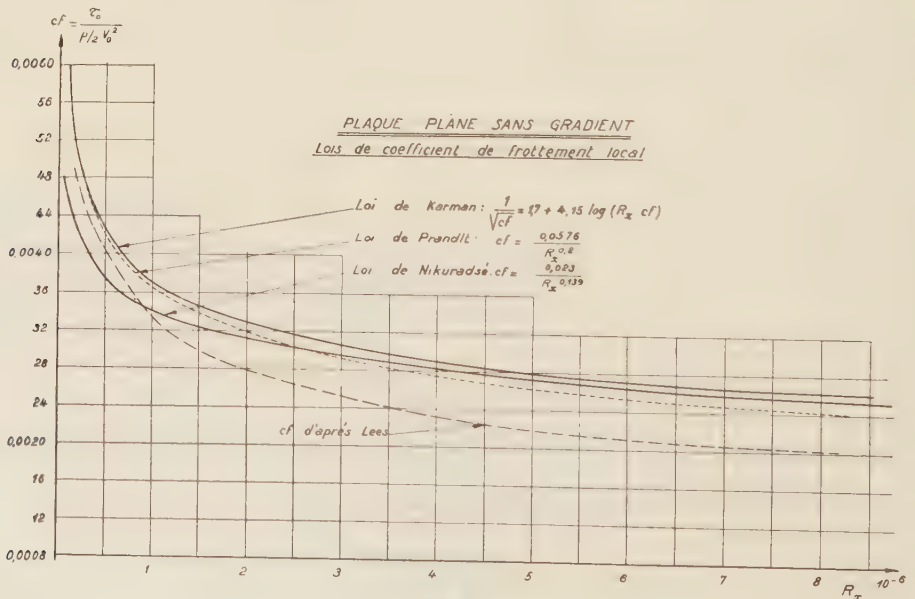
la valeur 4,15 provenant du fait que KARMAN a pris $k = 0,39$.

Cas de la plaque plane. — Ces résultats ont été étendus par KARMAN au cas de la plaque ; la représentation des vitesses est encore :

$$(12) \quad \frac{u}{u^*} = a + \frac{2,3}{k} \log_{10} \frac{u^* y}{\nu}$$

le coefficient de frottement local pouvant alors s'exprimer en fonction de R_x par la formule

$$(13) \quad \frac{1}{\sqrt{cf}} = 1,7 + 4,15 \log_{10} R_x \text{ cf. (Voir figure 1.)}$$



3. Introduction d'une représentation logarithmique pour $\frac{u}{V}$ en fonction de $\frac{y}{\delta}$.

L'examen de différents résultats concernant les couches limites turbulentes nous a montré que l'on pouvait représenter avec une bonne approximation le profil des vitesses par une loi :

$$(14) \quad \frac{u}{V} = 1 + K_1 \log_e \frac{y}{\delta} = 1 + K \log_{10} \frac{y}{\delta}; \quad (K = 2,3 K_1)$$

à condition de choisir convenablement le coefficient K_1 .

Cette loi, qui satisfait bien à la condition $u = V$ en $y = \delta$, n'est évidemment plus valable au voisinage de la paroi, mais reste d'une grande utilité en opérant de la façon suivante : lorsqu'on veut représenter par une équation les résultats concernant la répartition des vitesses dans une couche limite turbulente, il convient de respecter en premier lieu les résultats globaux et essentiellement les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement qui donneront le frottement :

Si l'on admet la représentation :

$$\frac{u}{V} = 1 + K_1 \log_e \frac{y}{\delta},$$

on a :

$$\delta^* = \delta \int_0^1 -K_1 \log \frac{y}{\delta} d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

$$\delta^{**} = \delta \int_0^1 -K_1 \log \frac{y}{\delta} \left[1 + K_1 \log \frac{y}{\delta} \right] d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

$$(15) \quad \delta^* = K_1 \delta.$$

$$(15 \text{ bis}) \quad \delta^{**} = K_1 (1 - 2K_1) \delta.$$

Étant donnée une courbe expérimentale de répartition des vitesses $\frac{u}{V} = f(y)$ il est facile d'obtenir δ^* et δ^{**} par intégration des courbes $1 - \frac{u}{V} = f(y)$ et $\frac{u}{V} \left(1 - \frac{u}{V} \right) = f(y)$.

On se trouve alors en tête de deux équations

$$\delta^* = K_1 (1 - 2K_1) \delta$$

$\delta^{**} = K_1 \delta$ qui déterminent, d'abord le coefficient K_1 de la représentation

$$\frac{u}{V} = 1 + K_1 \log_e \frac{y}{\delta}$$

que nous voulons appliquer, ensuite une nouvelle épaisseur δ_e qui n'est plus l'épaisseur pour laquelle $u = V$, mais qui se détermine d'une façon beaucoup plus précise.

L'association K_1, δ_e possède alors le grand avantage de satisfaire aux résultats expérimentaux concernant δ^{**} et δ^* et par conséquent aux résultats sur le frottement et sur le débit.

Il reste à vérifier que cette représentation des vitesses conçue dans le souci premier de respecter les résultats « globaux », reste acceptable « dans le détail » et que la nouvelle épaisseur δ_e reste suffisamment proche de l'épaisseur δ qu'on aurait obtenue en faisant $u = V$ pour $y = \delta$.

Nous verrons par nos expériences que la représentation logarithmique est dans ce sens très acceptable pour la plaque plane sans gradient de pression.

La loi des vitesses s'écrit alors : $\frac{u}{V_0} = 1 + K_1 \log \frac{y}{\delta}$ et les équations 15 et 15 bis permettent de relier directement K_1 au paramètre de forme $H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$.

$$(16) \quad K_1 = \frac{H-1}{2H}, \quad H = \frac{1}{1-2K_1}.$$

Si les profils de vitesses sont semblables, H et K_1 doivent être constants.

4. Justification de l'introduction de la loi précédente. Valeur du coefficient K .

Au paragraphe 2, nous avons donné un schéma du raisonnement de KARMAN aboutissant à une représentation logarithmique pour la vitesse u dans la couche limite ; le raisonnement donné est bien imparfait en ce sens qu'il fait intégrer à travers toute la couche limite la relation $\tau_0 = \rho k^2 y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$ basée sur l'hypothèse $l = ky$ valable seulement au voisinage de la paroi. Poursuivant néanmoins ce raisonnement nous aurons :

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left(\text{const.} + \frac{1}{k} \log_e y \right) \\ V &= \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left(\text{const.} + \frac{1}{k} \log_e \delta \right) \\ u - V &= \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \log_e \frac{y}{\delta} \quad \frac{u}{V} = 1 + \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho V^2}} \log_e \frac{y}{\delta} \end{aligned}$$

ce qui montre que le raisonnement de KARMAN pris sous une forme légèrement différente conduit à la représentation $\frac{u}{V} = 1 + K_1 \log_e \frac{y}{\delta}$ avec $K_1 = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho V^2}}$.

Autre raisonnement :

Admettons que la représentation des vitesses dans les couches limites turbulentes puisse s'écrire :

$\frac{u}{\bar{v}} = 1 + K_1 \log\left(\frac{y}{\delta}\right)$ et que le rapport $\frac{\tau}{\tau_0}$ soit une fonction polynômiale de $\frac{y}{\delta}$

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1 + B\left(\frac{y}{\delta}\right) + C\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + \dots$$

(sans aucune hypothèse sur les valeurs des coefficients B, C...). Nous aurons :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{VK_1}{y} \text{ et } \tau = \rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \rho V^2 l^2 \frac{K_1^2}{y^2} = \rho V^2 \left(\frac{l}{\delta}\right)^2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

$$\tau V^2 = \left(\frac{l}{\delta}\right)^2 \frac{K_1^2}{\left(\frac{y}{\delta}\right)^2}$$

Admettons alors également que la longueur de mélange puisse s'écrire :

$$l = k\left(\frac{y}{\delta}\right) + b\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + c\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \dots$$

$$\left(\frac{l}{\delta}\right)^2 = k^2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + b_1\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + c_1\left(\frac{y}{\delta}\right)^4 + \dots$$

nous aurons alors :

$$\frac{\tau}{\rho V^2} = \left(\frac{l}{\delta}\right)^2 \frac{K_1^2}{\left(\frac{y}{\delta}\right)^2} = K_1^2 \left[k^2 + b_1 \frac{y}{\delta} + c_1 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + \dots \right]$$

et :

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{\frac{\tau}{\rho V^2}}{\frac{\tau_0}{\rho V^2}} = \frac{K_1^2}{\tau_0} \left[k^2 + b_1 \frac{y}{\delta} + c_1 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + \dots \right] = 1 + B \frac{y}{\delta} + C \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + \dots$$

donc :

$$\frac{K_1^2}{\frac{\tau_0}{\rho V^2}} = \frac{1 + B \frac{y}{\delta} + C \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + \dots}{k^2 + b_1 \frac{y}{\delta} + c_1 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + \dots}$$

K_1^2 et $\frac{\tau_0}{\rho V^2}$ étant indépendants de y , ainsi évidemment que B, C, k, b₁, c₁, on doit avoir

$$\frac{K_1^2}{\tau_0} = \frac{1}{k^2} = \frac{B}{b_1} = \frac{C}{c_1} = \dots$$

donc

$$K_1 = k \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho V^2}}$$

Dans ces conditions, si les profils de vitesses sont semblables, on aura $K_1 = \text{Cte.}$ Or $\frac{\tau_0}{\rho V^2}$ est variable avec x , et par conséquent les hypothèses : profils de vitesses semblables, et k (premier coefficient de la longueur de mélange) constant = 0,4, apparaissent comme contradictoires.

5. Résultats récents sur la plaque sans gradient. Essais de Nikuradsé (référence 7).

NIKURADSE dans un ouvrage assez récent donne des résultats intéressants sur la plaque plane sans gradient : il s'agit d'essais effectués en Allemagne à des nombres de Reynolds variant entre 1 et 17 millions.

Toutes les conclusions de l'auteur proviennent d'une première constatation expérimentale essentielle : les vitesses dans les couches limites turbulentes de la plaque plane se placent sur une courbe $\frac{u}{V_0} = f\left(\frac{y}{\delta^*}\right)$ unique que NIKURADSE donne.

Nous en tirerons la première conclusion suivante : la courbe : $\frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) = f\left(\frac{y}{\delta^*}\right)$ est aussi une courbe unique et l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) d\left(\frac{y}{\delta^*}\right)$$

qui est égale à :

$$\frac{1}{\delta^*} \int_0^{\delta^*} \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy = \frac{\delta^{**}}{\delta^*} = \frac{1}{H}$$

est constante.

NIKURADSE en donne par ailleurs la valeur :

$$\frac{\delta^{**}}{\delta^*} = 0,767; \quad H = 1,303.$$

Si nous voulons représenter la courbe des vitesses de NIKURADSE par la loi

$$\frac{u}{V_0} = 1 + K_1 \log_e \frac{y}{\delta},$$

nous aurons donc :

$$K_1 = \frac{H-1}{2H} = 0,116.$$

De la courbe de NIKURADSE $\frac{u}{V_0} = f\left(\frac{y}{\delta^*}\right)$ il est facile de tirer la courbe $\frac{u}{V_0} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$.

D'après la première, en effet, on a $\frac{u}{V_0} = 1$ en $\frac{y}{\delta^*} = 8,3$; donc $\frac{\delta}{\delta^{**}} = 8,3$.

Ceci nous permet déjà de préjuger de la différence existant entre l'épaisseur δ et notre épaisseur δ_e ; en effet, avec la loi :

$$\frac{u}{V_0} = 1 + 0,116 \log_e \frac{y}{\delta_e}$$

on a :

$$\frac{\delta_e}{\delta} = \frac{1}{K_1} = 8,6,$$

donc

$$\frac{\delta}{\delta_e} = \frac{8,3}{8,6} = 0,965.$$

différence faible si l'on tient compte de l'imprécision du moyen de détermination de δ .

Sur la figure 2 nous avons représenté la courbe $\frac{u}{V_0} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$ tirée des résultats de NIKURADSE, comparée à sa représentation logarithmique :

$$\frac{u}{V_0} = 1 + 0,116 \log_e \frac{y}{\delta_e} = 1 + 0,267 \log_{10} \frac{y}{\delta_e}.$$

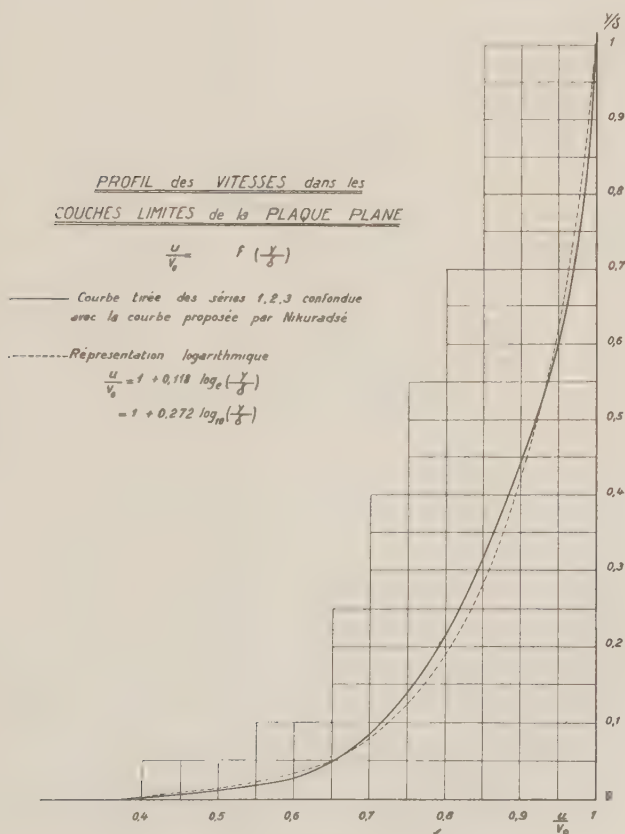


Fig. 2

6. Détermination des caractéristiques de la couche limite. Calcul de $\frac{\tau}{\tau_0}$, ε , et l .

La courbe unique de NIKURADSE $\frac{u}{V_0} = f\left(\frac{y}{\delta^*}\right)$ lui a permis de calculer $\frac{\tau}{\tau_0}$, et l à travers toute la couche limite.

Nous allons reprendre ces calculs, mais en adoptant comme variable $\frac{y}{\delta}$ au lieu de $\frac{y}{\delta^*}$.

Posons d'abord $\frac{y}{\delta} = \varphi$, $\frac{u}{V_0} = f(\varphi)$ et $F(\varphi) = \int_0^\infty f(\varphi) d\varphi$; les composantes u et v de la vitesse en un point de la couche limite dérivent d'une fonction de courant ψ :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

u , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, v s'expriment alors facilement en fonction de F , f , et $f' = \frac{df}{d\varphi}$ et de φ : on a:

$$u = V_0 f; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -V_0 f' \varphi \frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dx}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{V_0}{\delta} f'; \quad v = V_0 \frac{d\delta}{dx} (\varphi f' - F);$$

et nous remplacerons u , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, v par ces valeurs dans l'équation:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y};$$

puisque en régime turbulent $\tau = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}$, cette équation s'écrit encore:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{d}{dy} \left[\Lambda \frac{\partial u}{\partial y} \right] \text{ avec } \Lambda = \frac{\varepsilon}{\rho};$$

et, en remplaçant u , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, v par leurs valeurs, on arrive à:

$$-V_0 \delta \frac{d\delta}{dx} F f' = \frac{\partial (\Lambda f')}{\partial \varphi}.$$

Intégrant alors de φ à I , et remplaçant $(\Lambda f')_{\varphi=1}$ par sa valeur 0 (En $y = \delta$, $\tau = 0$) on arrive à:

$$\Lambda \frac{d\delta}{dx} g(\varphi) \quad \text{avec} \quad g(\varphi) = \int_\varphi^1 F f' d\varphi.$$

Puisqu'on connaît la répartition des vitesses $\frac{u}{V_0} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$ on peut calculer $g(\varphi)$ pour chaque valeur de $\varphi = \frac{y}{\delta}$ et l'on en tirera la courbe :

$$\frac{A}{V_0 \delta} \frac{d\delta}{dx} = f\left(\frac{y}{\delta}\right).$$

NIKURADSE a fait le calcul en prenant comme variable $\frac{y}{\delta^*}$ et a donné $\frac{A}{V_0 \delta^*} \frac{d\delta^*}{dx} = f\left(\frac{y}{\delta^*}\right)$ que nous avons ramené à :

$$\frac{A}{V_0 \delta} \frac{d\delta}{dx} = f\left(\frac{y}{\delta}\right). \text{ (figure 3-2.)}$$

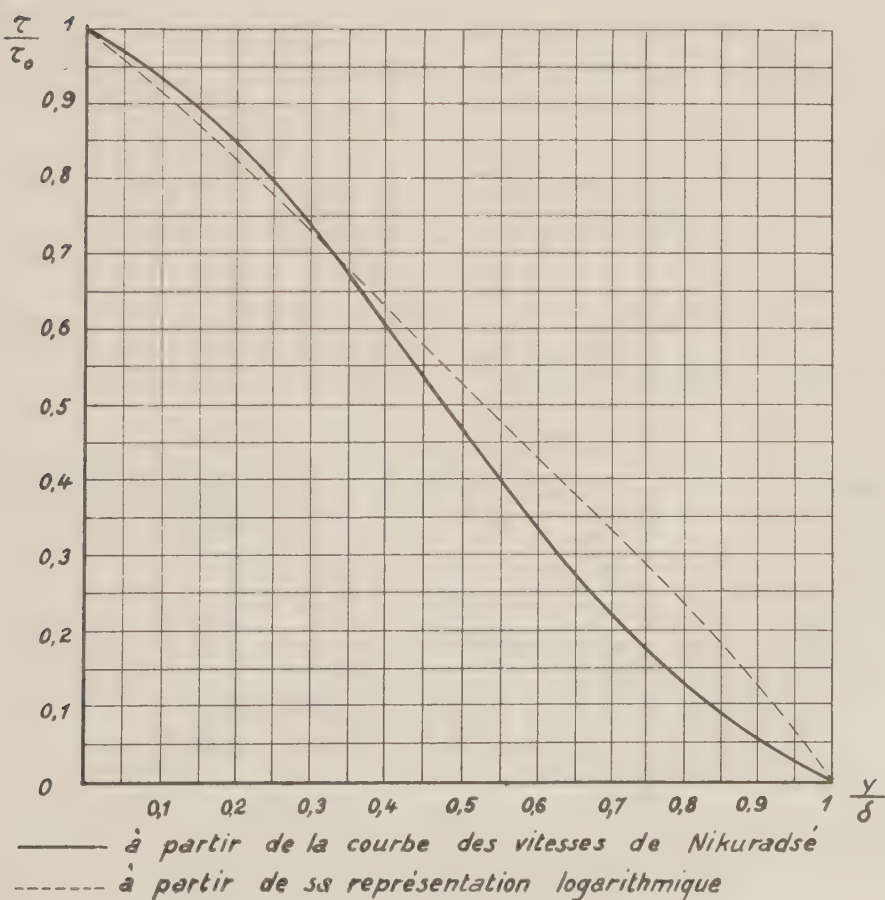


Fig. 3-1

Calcul de la longueur de mélange l .

On a :

$$\begin{aligned}\tau &= \rho \Lambda \frac{\partial u}{\partial y} = \rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\ \Lambda &= l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = l^2 \frac{V_0}{\delta} f' \\ l^2 &= \frac{g \delta^3 \frac{d\delta}{dx}}{f'} ; \quad \frac{l}{\delta \sqrt{\frac{d\delta}{dx}}} = f \left(\frac{y}{\delta} \right),\end{aligned}$$

transformée de la courbe $\frac{l}{\delta^* \sqrt{\frac{d\delta^*}{dx}}} = f \left(\frac{y}{\delta^*} \right)$ tirée par NIKURADSE de sa courbe universelle des vitesses est également représentée figure 3.

On voit que c'est la quantité $\frac{l}{\delta \sqrt{\frac{d\delta}{dx}}}$ et non $\frac{l}{\delta}$ qui est fonction universelle de $\frac{y}{\delta}$; on ne peut représenter $\frac{l}{\delta}$ comme fonction polynomiale de $\frac{y}{\delta}$ avec des coefficients constants, et k ne peut être constant si les profils de vitesses sont semblables.

Calcul de $\frac{\tau}{\tau_0}$:

On a :

$$\tau = \rho \Lambda \frac{\partial u}{\partial y} = \rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 ; \quad \tau = \rho \frac{d\delta}{dx} g f' V_0^3 ; \quad \frac{\tau}{\tau_0} = \frac{g f'}{(g f')_0},$$

et l'on peut ainsi calculer $\frac{\tau}{\tau_0}$ en fonction de $\frac{y}{\delta}$ à partir de la courbe universelle des vitesses d'après NIKURADSE (voir fig. 3-1).

7. Calcul de $\frac{\tau}{\tau_0}$, $\Lambda = \frac{\varepsilon}{\rho}$ et l , à partir de la représentation logarithmique des vitesses.

Calcul de $\Lambda = \frac{\varepsilon}{\rho}$:

Nous avons :

$$\frac{\Lambda}{V_0 \delta \frac{d\delta}{dx}} = g(\varphi) = \frac{1}{\varphi^2} \int \frac{F f' d\varphi}{f}$$

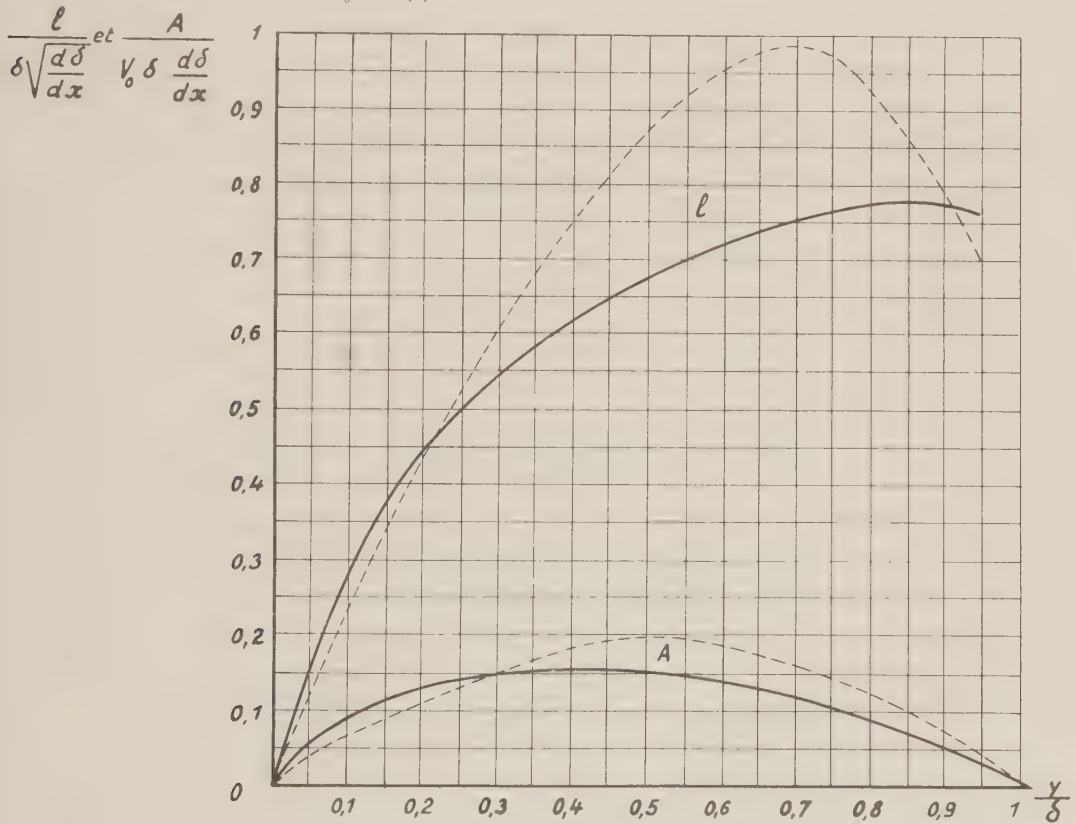
Si nous adoptons la loi

$$\frac{u}{V_0} = 1 + K_1 \log_e \left(\frac{y}{\delta} \right) \text{ avec } K_1 = 0,116$$

nous aurons :

$$\begin{aligned}
 F &= \int_0^{\varphi} (1 + K_1 \log \varphi) d\varphi = \varphi + K_1 (\varphi \log \varphi - \varphi) \\
 f' &= \frac{\partial \left(\frac{u}{V_0} \right)}{\partial \left(\frac{y}{\delta} \right)} = \frac{K_1}{\varphi} \quad Ff' = K_1 (1 + K_1 \log \varphi - K_1) \\
 \int_0^1 Ff' d\varphi &= K_1 \int_0^1 (1 + K_1 \log \varphi - K_1) d\varphi \\
 K_1 \int_0^1 (1 - \varphi - K_1 (1 - \varphi) - K_1 (1 + \varphi \log \varphi + \varphi)) & \\
 g(\varphi) = \frac{\int_0^1 Ff' d\varphi}{f'} &= \varphi [1 - \varphi - 2K_1 (1 - \varphi) - K_1 \varphi \log \varphi].
 \end{aligned}$$

Nous avons ainsi calculé $\frac{A}{V_0 \delta \frac{d\delta}{dx}}$ à partir de la représentation $\frac{u}{V_0} = 1 + K_1 \log_e \frac{y}{\delta}$ avec $K_1 = 0,116$, que nous avons comparé à la courbe tirée de la courbe expérimentale des vitesses d'après NIKURADSE $\frac{u}{V_0} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$ (figure 3).



Evolution de la longueur de mélange, de la viscosité apparente, et du frottement interne à travers la couche limite (Plaque plane)

Calcul de l :

On a :

$$\frac{l}{\delta \sqrt{\frac{d\delta}{dx}}} = \sqrt{\frac{g}{f'}} = \sqrt{\frac{g\bar{\varphi}}{K_1}}.$$

Nous avons encore, figure 3-2, comparé la répartition de $\frac{l}{\delta \sqrt{\frac{d\delta}{dx}}}$ obtenue à partir de la courbe expérimentale des vitesses de NIKURADSE à celle obtenue à partir de sa représentation logarithmique. Il existe, aussi bien pour l que pour A , une différence importante entre les courbes tirées des répartitions expérimentale et logarithmique; si la représentation logarithmique donne une assez bonne approximation des valeurs de la vitesse, on ne peut espérer obtenir une représentation des pentes $\frac{\partial u}{\partial y}$, d'où la différence.

Calcul de k premier coefficient de la longueur de mélange. Il est possible, à partir de la représentation logarithmique, de recalculer la valeur de k . On a en effet :

$$k = \left(\frac{\partial l}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Or

$$\frac{l}{\delta \sqrt{\frac{d\delta}{dx}}} = \sqrt{\frac{g\bar{\varphi}}{K_1}}; \quad \frac{\partial l}{\partial y} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial l}{\partial \bar{\varphi}} = \sqrt{\frac{\frac{d\delta}{dx}}{K_1}} \frac{d}{d\bar{\varphi}} \left(\sqrt{g\bar{\varphi}} \right)$$

avec

$$g\bar{\varphi} = \bar{\varphi}^2 [1 - \bar{\varphi} - 2K_1(1 - \bar{\varphi}) - K_1\bar{\varphi} \log \bar{\varphi}];$$

$$\frac{\partial l}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{(1 - 2K_1)(2\bar{\varphi} - 3\bar{\varphi}^2) - K_1[3\bar{\varphi}^2 \log \bar{\varphi} + \bar{\varphi}^2]}{\bar{\varphi} \sqrt{(1 - \bar{\varphi})(1 - 2K_1) - K_1\bar{\varphi} \log \bar{\varphi}}} \sqrt{\frac{d\delta}{dx}};$$

$$\frac{\partial l}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{(1 - 2K_1)(2 - 3\bar{\varphi}) - K_1[3\bar{\varphi} \log \bar{\varphi} + \bar{\varphi}]}{\sqrt{(1 - \bar{\varphi})(1 - 2K_1) - K_1\bar{\varphi} \log \bar{\varphi}}} \sqrt{\frac{d\delta}{dx}};$$

$$k = \left(\frac{\partial l}{\partial y} \right)_{y=0} = \sqrt{\frac{\frac{d\delta}{dx}}{K_1}} \frac{1 - 2K_1}{\sqrt{1 - 2K_1}} = \sqrt{\frac{1 - 2K_1}{K_1}} \frac{d\delta}{dx}$$

ou puisque $\delta^{**} = K_1(1 - 2K_1)\delta$:

$$k = \frac{1}{K_1} \sqrt{\frac{d\delta^{**}}{dx}} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{1}{K_1},$$

ce qui confirme l'expression trouvée pour K_1 au paragraphe 4.

Calcul de $\frac{\tau}{\tau_0}$. On a : $\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{gf'}{(gf')_0}$ ce qui donne avec la représentation logarithmique :

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{(1 - \varphi)(1 - 2K_1) - K_1\varphi \log \varphi}{(1 - 0)(1 - 2K_1) - 0}.$$

La courbe $\frac{\tau}{\tau_0}$ ainsi obtenue a été comparée à celle tirée de la courbe expérimentale des vitesses de NIKURADSE, figure 3-2 ; on note encore la différence importante expliquée dans le cas de A et l.

8. Évolution des épaisseurs et du frottement d'après Nikuradsé.

NIKURADSE donne encore, à la suite de ses expériences, l'évolution de δ^* et δ^{**} avec x :

$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{0,01738}{R_x^{0,139}}; \quad \frac{\delta^{**}}{x} = \frac{0,01333}{R_x^{0,139}}.$$

Le frottement s'en déduit alors :

$$cf = 2 \frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{0,023}{R_x^{0,139}}; \quad Cf = 2 \frac{\delta^{**}}{x} = \frac{0,02666}{R_x^{0,139}}.$$

La formule pour cf diffère quelque peu des formules déjà exposées, aux faibles nombres de REYNOLDS. L'accord est très satisfaisant à partir de $Rx = 2 \times 10^6$. (Voir fig. 1.)

CHAPITRE II

PARTIE EXPÉRIMENTALE SUR LA PLAQUE SANS GRADIENT

L'exposé des différentes méthodes et des différents résultats sur les couches limites turbulentes sans gradient de pression, montre en résumé un assez bon accord des différents auteurs en ce qui concerne le frottement, et par conséquent, on doit s'attendre à ce que les résultats sur les différentes épaisseurs, et notamment l'épaisseur de quantité de mouvement, soient bien définis.

Nous avons vu toutefois que les hypothèses : profils de vitesses semblables et longueur de mélange $\frac{l}{\delta}$ fonction universelle de $\frac{y}{\delta}$ étaient contradictoires. Il nous a donc semblé utile d'essayer de vérifier par des expériences si les profils de vitesses dans les couches limites de la plaque plane étaient bien semblables.

D'autre part, étant prévu qu'une partie importante de notre travail consisterait en l'étude d'une plaque plane polie soumise à différentes distributions de vitesses potentielles, il nous a paru intéressant de connaître l'évolution d'une couche limite sans gradient sur la même plaque, ceci devant nous permettre :

- 1° De mettre au point matériel et méthodes de mesures ;
- 2° D'établir les résultats sur la plaque plane qui pourront servir de base aux résultats et méthodes de calcul sur les couches limites avec gradients.

Nous allons donc exposer maintenant les conditions et les résultats de nos essais sur notre plaque plane polie.

CHAPITRE II-A

MATÉRIEL EXPÉRIMENTAL ET MÉTHODES DE MESURE

1. Description de la plaque et de la soufflerie.

La plaque d'expérience est une plaque de duralumin, de longueur 3 m., de largeur 0,28 m qui forme la paroi inférieure d'une veine rectangulaire dont la hauteur, de 0,185 m. à sa jonction avec le collecteur, est ensuite variable par réglage de la paroi supérieure.

Pour éviter toute influence de la rugosité, le poli de la plaque a été particulièrement soigné : toute la plaque a d'abord été recouverte d'une couche d'enduit cellulosique ce qui a permis d'annuler les ondulations et de supprimer les perturbations éventuelles. Cette couche d'enduit a ensuite été recouverte d'une couche de vernis lisse pour carrosseries automobiles.

Sur les parois latérales parallèles ont été aménagées des ouvertures rectangulaires avec fenêtres de plexiglass donnant vue à l'intérieur de la soufflerie et qui nous ont permis de faire facilement tous les réglages et repérages nécessaires aussi bien pour la soufflerie en marche qu'à l'arrêt.

A l'amont, la veine est reliée à un caisson d'aspiration renfermant un compresseur centrifuge de 4 CV., par l'intermédiaire d'un premier canal, à section rectangulaire constante égale à la section de sortie de fin de plaque, puis, d'un raccordement réglable reliant à l'ouverture du caisson à travers un joint élastique destiné à éviter que les vibrations du caisson ne se transmettent à la veine.

Le schéma général en est représenté figure 4.

2. Collecteurs. Influence de la forme du collecteur.

Nous avons été conduits au cours de nos essais à utiliser plusieurs formes du collecteur, en constatant que cette forme possédait une grande influence sur le comportement de l'écoulement dans toute la veine qui suit.

Nous décrirons les différents collecteurs employés, en même temps que les phénomènes observés.

Collecteur A. — Notre premier collecteur était un collecteur double courbure, de section d'entrée $0,70 \text{ m} \times 0,65 \text{ m}$, de section de sortie $0,28 \text{ m} \times 0,185 \text{ m}$, de longueur 0,42 m. Il possédait à l'entrée un filtre dont les aubages droits étaient espacés de 20 mm dans les deux directions, et avaient une profondeur de 20 mm. Un grillage de maille 1,8 mm suivant immédiatement le filtre.

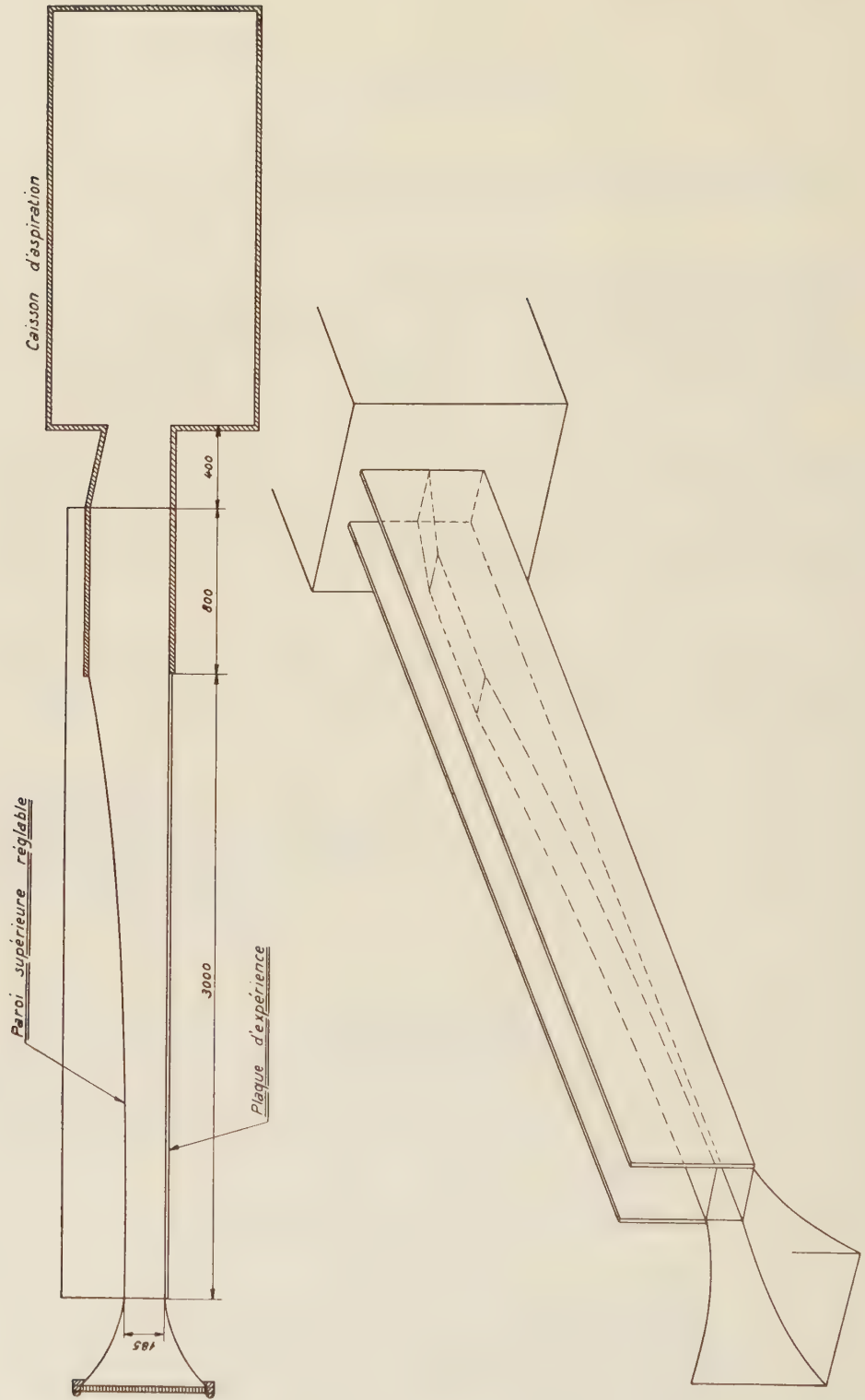


Fig. 4

Dès les premiers essais nous nous sommes rendus compte d'un très grave défaut que la suite nous a obligés à attribuer à la forme du collecteur : dans la veine, la distribution des pressions totales, perpendiculairement à la plaque, était mauvaise, la pression totale décroissante dans la couche limite ne s'établissant pas constante dès la frontière de celle-ci, mais possédant vers le centre de la veine une répartition « en escalier » (ceci valant pour une section située à 180 cm de la jonction de la plaque avec le collecteur).

L'adjonction à l'avant du collecteur d'une chambre de tranquillisation rectangulaire à un puis deux éléments de longueur 16 cm, n'a pas permis de corriger ce défaut que nous avons alors attribué à un décollement provoqué dans le collecteur par la double courbure.

Nous avons donc transformé notre collecteur A double courbure en collecteur A simple courbure de dimensions égales, et obtenu immédiatement une répartition des pressions totales correcte, bien constante dès la frontière de la couche limite.

Les collecteurs A double et simple courbure, avec les répartition de pression totale correspondantes, en $x = 180$ cm sont représentés figure 5.

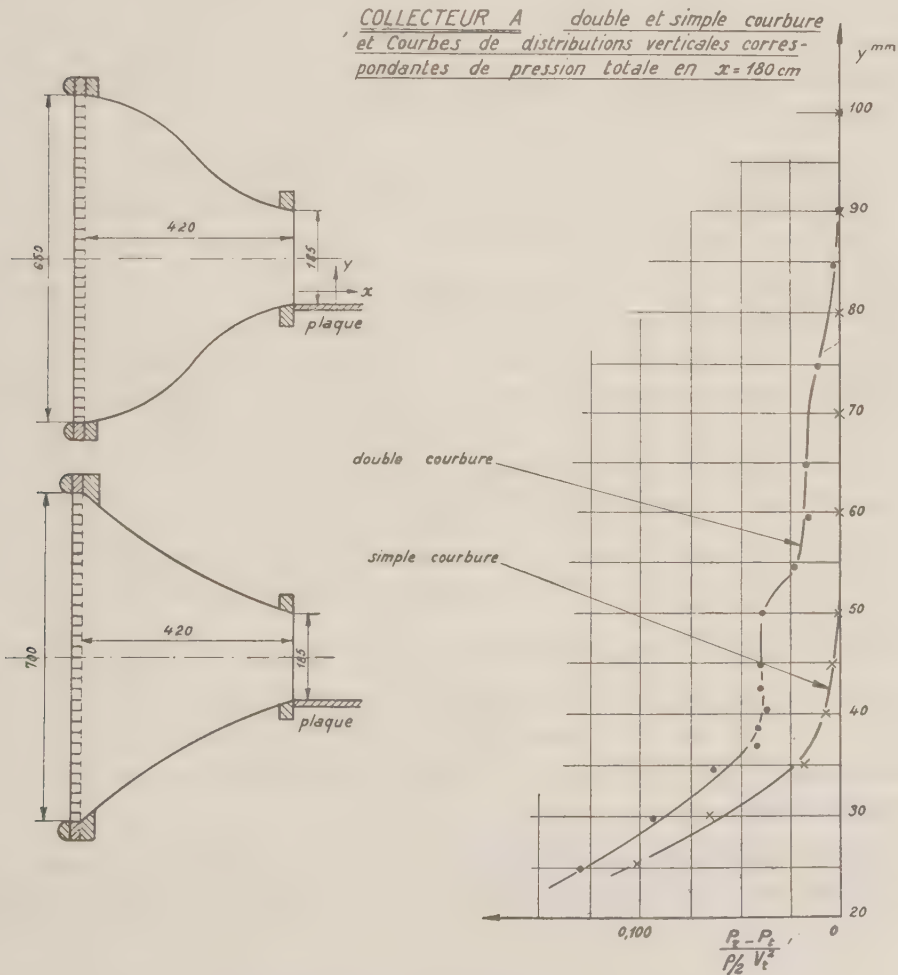


Fig. 5

Les deux premières séries d'essais sur la plaque plane sans gradient ont été faites avec le collecteur A transformé en simple courbure, mais nous avons bientôt dû abandonner ce collecteur pour des raisons que nous allons exposer maintenant.

Influence de la forme du collecteur sur la stabilité de l'écoulement dans les couches limites.

Sous la forme simple courbure, le collecteur A nous donnait toute satisfaction en ce qui concerne l'écoulement potentiel; celui-ci était bien stable et régulier, la pression totale étant bien constante à l'extérieur de la couche limite, égale à la pression extérieure diminuée d'une quantité ε due à la perte de charge du filtre et du grillage.

Par contre, il existait dans la couche limite de la plaque une instabilité des vitesses très grande, qui a rendu l'expérimentation très délicate; nous ne pouvions juger de cette instabilité qu'au travers de nos instruments de mesure : manomètre et tube de pression totale (la pression statique restant stable).

L'influence de la dimension du tube de pression totale est très grande quant à la stabilité de l'alcool dans le tube du manomètre. Avec un tube de pression totale d'ouverture 0,25 mm, nous avons jugé impossible d'effectuer une lecture, les fluctuations sur ΔP_t (différence entre la pression totale de référence et la pression totale à mesurer) atteignent 5 à 8 mm d'alcool de part et d'autre d'une valeur moyenne pouvant varier entre 0 et 40 mm d'alcool suivant la position du tube de pression totale dans la couche limite.

Il était absolument nécessaire d'amortir, problème assez délicat. Finalement nous avons adopté l'auto-amortissement c'est-à-dire l'amortissement obtenu par étranglement de la section d'entrée du tube de pression totale explorant la couche limite.

Le tube de pression totale utilisé était constitué d'un tube de laiton de diamètre extérieur 1,5 mm de diamètre intérieur 1 mm aplati à son extrémité sur une longueur de 2 à 3 mm et présentant une ouverture de 0,05 mm. Il nous a permis d'obtenir une grande stabilité de l'alcool dans le tube du manomètre et une lecture aisée; toutefois, le temps d'établissement des pressions à travers un tel instrument est considérable, la durée d'exploration d'une couche limite devenant prohibitive; il subsiste encore une incertitude sur la mesure effectuée, le risque d'erreurs par manque d'attente de l'établissement étant grand.

Les deux premières séries d'essais ont été effectuées toutefois dans ces conditions : collecteur A simple courbure et tube de pression totale d'ouverture 0,05 mm.

Amélioration de la stabilité dans les couches limites. Collecteur B.

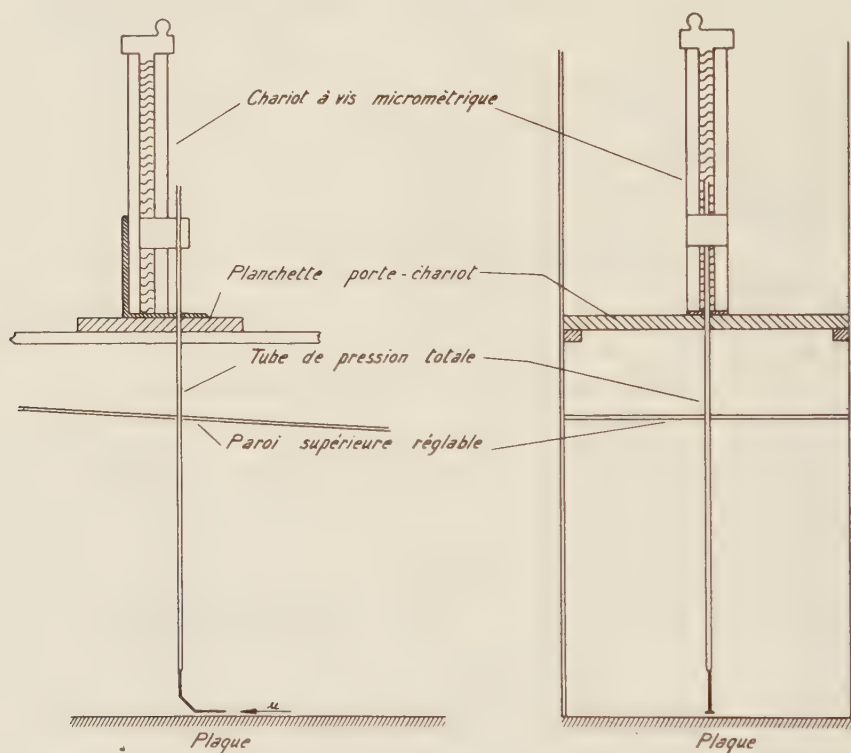
Nous avons alors essayé d'améliorer la stabilité de l'écoulement dans les couches limites. Attribuant d'abord cette instabilité à une trop grande turbulence du courant d'air, nous avons réadapté au collecteur A la chambre de tranquillisation à deux éléments; l'effet obtenu fut nettement insuffisant.

Restait à voir l'influence du rapport de contraction : un premier essai rapide nous ayant encouragé dans cette voie, nous avons construit un collecteur à grand rapport de contraction, dénommé collecteur B : il s'agit d'un collecteur simple courbure, de section d'entrée $1\text{ m} \times 1\text{ m}$, de section de sortie $0,28\text{ m} \times 0,185\text{ m}$, de longueur 1,30 m possédant à l'entrée un filtre dont les aubages droits de profondeur 10 cm étaient espacés de 5 cm.

3. Exploration des vitesses dans les couches limites.

Pour obtenir la distribution des vitesses dans la couche limite nous y avons simplement mesuré la pression totale, ou plus exactement la différence entre la pression totale de l'écoulement potentiel et la pression totale du point de mesure dans la couche limite. La pression statique, constante dans une section de la veine, a été déterminée par une exploration longitudinale préalable.

Nous avons utilisé les tubes de pression totale décrits au paragraphe précédent, tubes portés par un chariot à vis micrométrique et introduits par la paroi supérieure selon le schéma de la figure 7.



Montage du tube de pression totale pour l'exploration de la couche limite.

Fig. 7

Pour obtenir une grande précision dans la distance à la plaque, nous avons opéré en éloignant le tube : la prise de pression totale étant d'abord plaquée contre la paroi, on agit sur le chariot pour l'en éloigner ; dès que le tube de pression totale se décolle de la paroi, le niveau de l'alcool baisse brutalement dans le tube du manomètre ; étant donné l'importance du gradient de vitesse (et de pression totale) au voisinage de la paroi, nous avons pu obtenir de cette façon une précision du $1/20$ de millimètre.

4. Mesure des pressions statiques.

Nous avons vérifié dans presque tous les cas, que la pression statique se maintenait constante dans une section. Pour obtenir la répartition des pressions statiques dans la veine il nous a donc suffi d'introduire par le collecteur une longue sonde recourbée à son extrémité et de la déplacer longitudinalement.

CHAPITRE II-B

ESSAIS EFFECTUÉS ET RÉSULTATS OBTENUS

1. Programme des essais.

Pour les raisons dites plus haut, nous avons donc exploré les couches limites de notre plaque soumise à une distribution de pressions longitudinale constante.

Deux séries d'essais ont d'abord été faites avec le collecteur A et le tube de pression totale d'ouverture 0,05 mm : la première concernait une couche limite turbulente précédée d'une couche laminaire ; la seconde, une couche limite rendue turbulente dès le début de la plaque.

Nous avons décrit les difficultés rencontrées dans l'expérimentation à cause de l'instabilité des vitesses, et comment la conception d'un collecteur B à grand rapport de contraction avait permis de stabiliser l'écoulement dans les couches limites, rendant ainsi l'expérimentation plus facile et plus sûre ; nous avons tenu à vérifier, dans ces conditions, les résultats obtenus avec le collecteur A dans le cas d'une couche limite turbulente dès le départ.

Nous aurons donc sur la plaque plane sans gradient trois séries d'essais.

2. Réglage de la distribution constante des pressions.

Des couches limites s'établissant sur les quatre parois de la veine, les vitesses et pressions potentielles ne sont plus données par l'association de l'équation de continuité $SV = Cte$ en prenant pour S la section réelle de la veine, et du théorème de BERNOULLI. On doit faire entrer dans le calcul une section efficace qui s'obtient en retranchant de la section réelle une surface égale au produit de l'épaisseur de déplacement par le périmètre — ceci valant pour des parois aérodynamiquement semblables.

Dans notre cas, les parois n'étaient pas semblables, la plaque étant lisse, et les parois latérales et supérieure rugueuses, et il était impossible de calculer sur elles l'épaississement de la couche limite.

Pour obtenir la distribution uniforme, nous avons donc dû faire varier par tâtonnements la hauteur de la veine.

Nous avons d'abord mesuré sur le premier mètre de la plaque la distribution des pressions pour une section constante (voir pl. I). Pour obtenir sur ce premier mètre une distribution sensiblement constante, nous avons alors été conduits, après plusieurs essais à donner à la paroi supérieure une divergence de 185 mm (hauteur d'entrée) à 205 mm (hauteur au bout du premier mètre). Pour obtenir une répartition sensiblement constante sur les deux mètres restants il nous a suffi alors de donner à la paroi supérieure une divergence de 205 mm (hauteur à $x = 1$ m) à 230 mm (hauteur à $x = 3$ m).

La distribution des pressions (*) finalement obtenue (ceci pour les essais avec collecteur A), est représentée planche 1. On n'a pu éviter à l'entrée un léger « effet collecteur », la pression ne s'établit pas constante dès la jonction de la plaque avec le collecteur : il existe un minimum de pression situé légèrement en aval, après lequel la pression croît et s'établit constante.

Avec le collecteur B la distribution des pressions est peu modifiée; on notera toutefois que la pente du collecteur B, plus douce à sa jonction avec la plaque, a permis de résorber l'effet collecteur (voir également pl. I).

Il semble logique d'admettre que les légères variations de pression suivant x qui subsistent, ne peuvent influencer l'évolution des couches limites et nous avons admis les distributions de pression retenues comme constantes.

NOTA. — Ces explorations de pression ont été faites à une vitesse $V_0 = 26$ m/s qui sera notre vitesse d'essais pour la plaque plane sans gradient.

3. Première série d'essais sur la plaque plane.

Cette première série, faite avec le collecteur A et le tube de pression totale d'ouverture 0,05 mm concerne une couche limite turbulente précédée d'une couche laminaire.

Lors du vernissage de la plaque nous avons pu soigner particulièrement la jonction collecteur-plaque; la couche limite était donc laminaire sur une certaine longueur de plaque, une transition la transformant ensuite en couche turbulente.

Nous avons exploré les couches limites pour la partie turbulente de la plaque et pour quelques points en laminaire, à la vitesse de référence $V_0 = 26$ m/s.

Les courbes $\frac{u}{V_0} = f(y)$ pour ces différents points x sont représentées planche II. Nous avons ensuite intégré les courbes $1 - \frac{u}{V_0} = f(y)$ et $\frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) = f(y)$ et obtenu ainsi les valeurs des épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy \qquad \delta^{**} = \int_0^\delta \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy$$

qui sont données dans le tableau I en même temps que les valeurs du paramètre de forme

$$H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}.$$

Détermination de l'origine de la couche limite turbulente.

Pour comparer les résultats ainsi obtenus avec les lois admises, il est essentiel de connaître l'origine de la couche limite turbulente.

(*) Distribution $\frac{p - p_r}{\rho/2 V_r^2} = f(x)$.

p pression statique du point de mesure.

p_r pression statique, V_r vitesse données par un tube de Pitot référence placé dans l'écoulement potentiel à $x = 0$ m. 80, du début de la plaque.

L'observation des courbes $\frac{u}{V_0} = f(y)$ montre une transformation entre les abscisses $x = 28$ cm et $x = 33$ cm. Il est logique d'admettre que le point de transition se trouve situé entre ces points.

Par ailleurs les courbes δ^* et $\delta^{**} = f(x)$ représentées figure 8 indiquent bien une cassure dans la région indiquée; nous avons donc admis $x = 30$ cm comme point de transition, mais il reste à déterminer l'origine de la couche limite turbulente.

Essais sur plaque plane (1^{ère} série)

Evolution de δ^* et δ^{**} au voisinage du point de transition

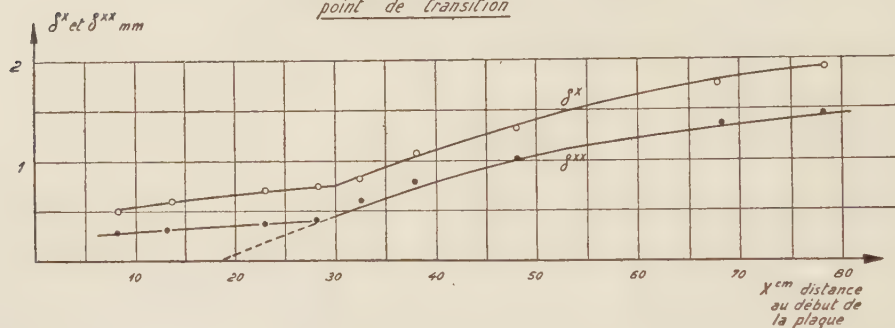


Fig. 8

Pour obtenir cette origine nous avons utilisé l'abaque de M. GUIENNE (réf. 8) qui donne la valeur du nombre de Reynolds R_{xt} pour la plaque en fonction du nombre de Reynolds R_{xo} :

$R_{xo} = \frac{V_0 x_0}{\nu}$ x_0 étant la distance de l'origine de la couche limite turbulente au début de la plaque;

$R_{xt} = \frac{V_0 x_t}{\nu}$ x_t étant la distance du point de transition au début de la plaque.

Nous avons obtenu dans notre cas $x_0 = 19$ cm.

4. Deuxième série d'essais sur la plaque plane.

La deuxième série d'essais, faite toujours avec le collecteur A et le tube de pression totale d'ouverture 0,05 mm, concerne une couche limite turbulente dès le début de la plaque. Pour ce faire, nous avons tendu, transversalement un fil perturbateur de diamètre 0,5 mm à l'origine de la plaque.

Les courbes $\frac{u}{V_0} = f(y)$ sont représentées sur la planche III.

Les valeurs de δ^* , δ^{**} et H sont données dans le tableau 2.

Ces essais ont été effectués à la vitesse $V_0 = 26$ m/s.

5. Troisième série d'essais sur la plaque plane.

La troisième série d'essais a été faite avec le collecteur B au moyen d'un tube de pression totale d'ouverture 0,1 mm.

Elle concerne une couche limite turbulente dès l'origine de la plaque, ce résultat ayant été obtenu par une légère saillie de la plaque à sa jonction avec le collecteur. La vitesse était toujours $V_0 = 26$ m/s.

Ces essais n'étant destinés qu'à vérifier les résultats obtenus précédemment, nous n'avons fait que quelques essais à partir du premier mètre.

Les courbes $\frac{u}{V_0} = f(y)$ sont représentées planche IV.

Les valeurs de δ^* et δ^{**} H, sont rassemblées dans le tableau 3.

CHAPITRE II C

DISCUSSION DES RÉSULTATS OBTENUS

1. Évolution de l'épaisseur de quantité de mouvement.

Nous avons tracé sur la figure 9 les courbes de δ^{**} épaisseur de quantité de mouvement en fonction de x vrai — x vrai étant la distance à l'origine de la couche limite turbulente — pour les trois séries d'essais sur la plaque plane.

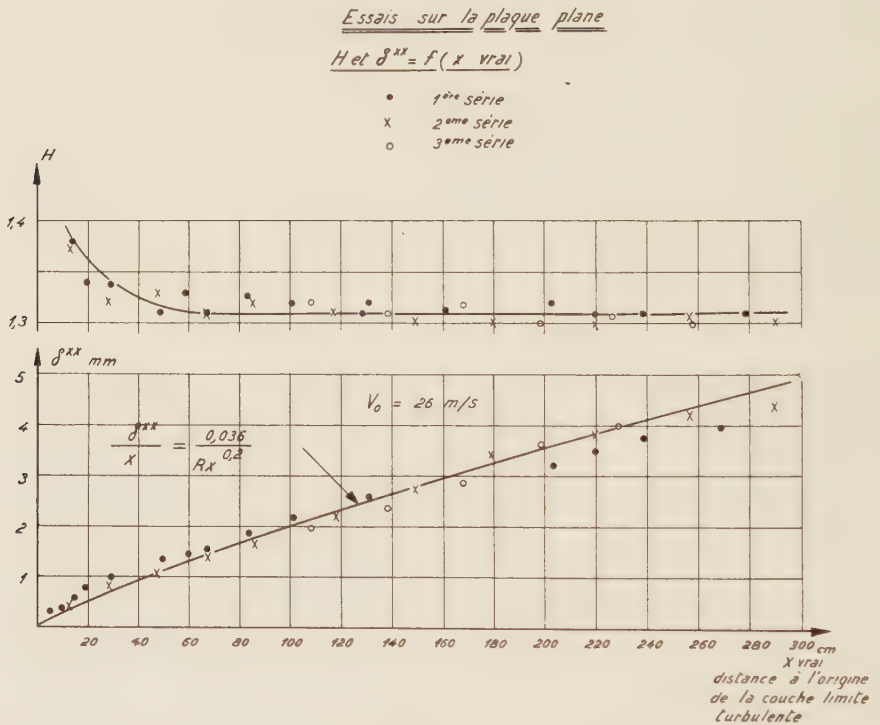


Fig. 9

Les points expérimentaux obtenus sont quelque peu dispersés, ce qui montre qu'il serait vain d'espérer obtenir une loi pour δ^{**} sans multiplier les essais.

Notre but n'étant que de vérifier les lois classiques, nous avons seulement porté sur la même figure la loi en puissance $\frac{\delta^{**}}{x} = \frac{0.036}{Re_x^{0.2}}$ pour nos conditions d'essais; cette loi donne une courbe qui passe assez bien au milieu de nos points expérimentaux, et nous admettrons les lois en puissance exposées page 16 pour l'épaisseur de quantité de mouvement et pour le coefficient local, ces lois devant nous fournir pour le calcul des couches limites avec gradients de pression, une base de départ intéressante.

2. Paramètre de forme H.

Si nous portons (fig. 9) le paramètre de forme $H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$ en fonction de x vrai nous voyons que ce paramètre s'établit bien constant; la valeur moyenne trouvée pour nos essais est $H = 1,31$.

Toutefois, vers l'origine de la couche limite turbulente H n'est pas égal à cette valeur 1,31 : lorsqu'on passe de la couche limite laminaire à la couche turbulente, le paramètre de forme ne décroît pas brutalement des fortes valeurs en laminaire à la valeur 1,31 en turbulent établi; a décroissance est progressive et le paramètre ne s'établit constant qu'au bout d'un certain parcours de la couche limite turbulente.

3. Distribution des vitesses dans la couche limite.

La connaissance des épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement δ^* et δ^{**} nous a permis d'obtenir en chaque point la valeur du coefficient K_1 et de l'épaisseur δ_l définis lors de l'introduction de la loi représentative des vitesses $\frac{u}{V_0} = 1 + K_1 \log_e \left(\frac{y}{\delta_l} \right)$. La détermination de l'épaisseur dite apparente δ est par contre assez délicate : c'est l'ordonnée pour laquelle $u = V_0$ et cette ordonnée sera obtenue par détermination du point de tangence entre la courbe expérimentale $\frac{u}{V_0} = f(y)$ et la droite $\frac{u}{V_0} = 1$. Ces réserves faites, il est facile de voir, par observation des courbes de vitesses des planches II, III, IV, que les épaisseurs diffèrent peu ou, en tout cas, ne présentent pas de différence systématique.

Pour obtenir les profils de vitesses nous tracerons donc $\frac{u}{V_0} = f\left(\frac{y}{\delta_l}\right)$ plutôt que $\frac{u}{V_0} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$ vu la meilleure définition de δ_l .

Nous avons rassemblé figure 10 les courbes $\frac{u}{V_0} = f\left(\frac{x}{\delta_l}\right)$ pour toutes les explorations de couche limite à paramètre de forme H établi à la valeur constante 1,31.

Les points se groupent bien sur une courbe unique qui sera donc la courbe universelle de répartition des vitesses dans les couches limites de la plaque plane sans gradient de pression.

Les profils de vitesses sont bien semblables comme l'indiquait la constatation $H = Cte$.

Sur la figure 2 nous avons représenté notre courbe universelle (il est remarquable de constater que cette courbe est pratiquement confondue avec celle tirée des essais de NIKURADSE).

Si nous voulons représenter cette courbe par une loi $\frac{u}{V_0} = 1 + K_1 \log_e \left(\frac{y}{\delta} \right)$ nous devons prendre pour K_1 la valeur tirée de la valeur moyenne 1,31 trouvée pour H :

$$\text{Soit } K_1 = \frac{H-1}{2H} = 0,118.$$

Nous avons également tracé figure 2 la courbe $\frac{u}{V_0} = 1 + 0,118 \log_e \left(\frac{y}{\delta} \right)$. On peut voir, que si cette courbe ne représente pas rigoureusement la répartition des vitesses, elle en est relativement peu éloignée.

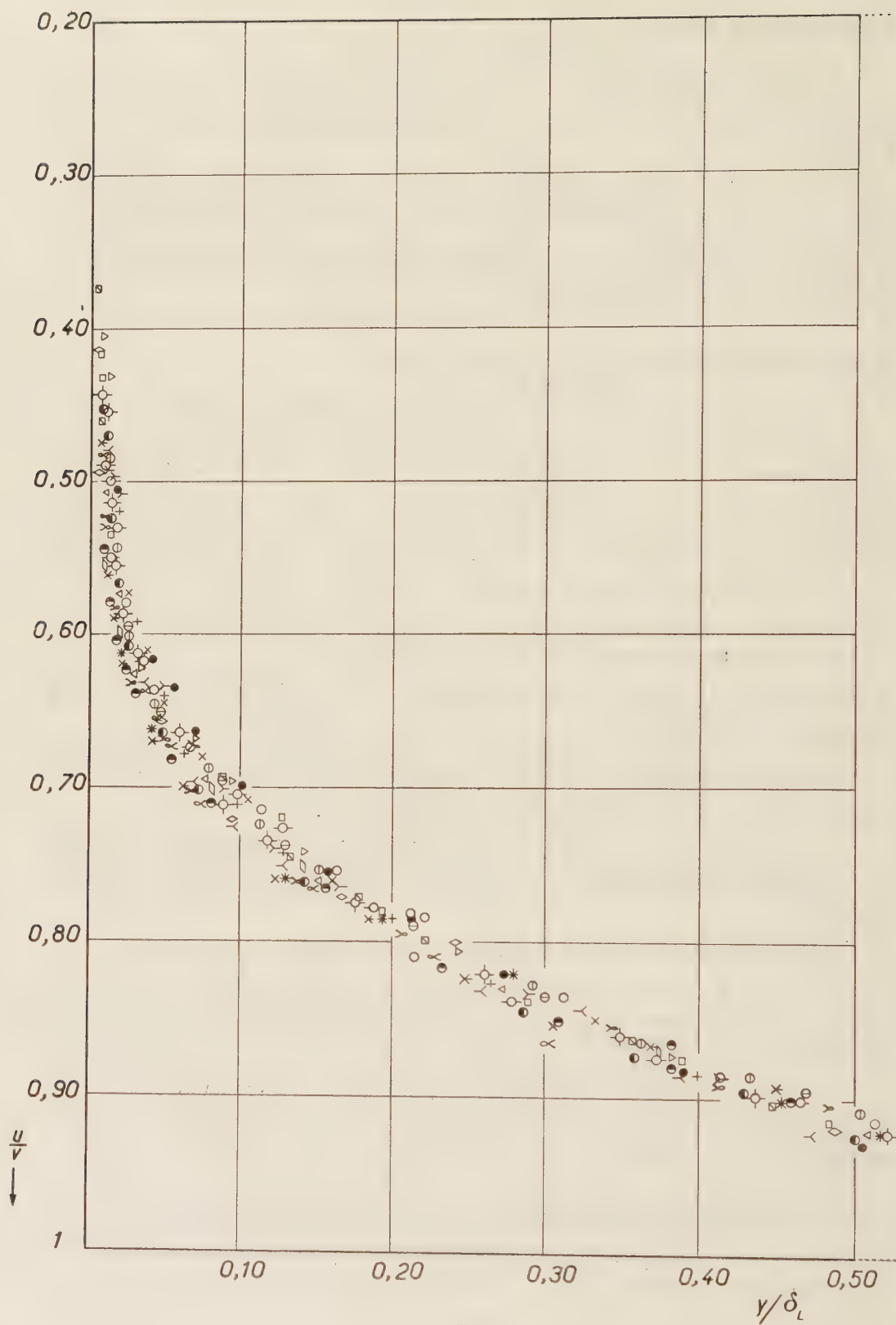


Fig. 10

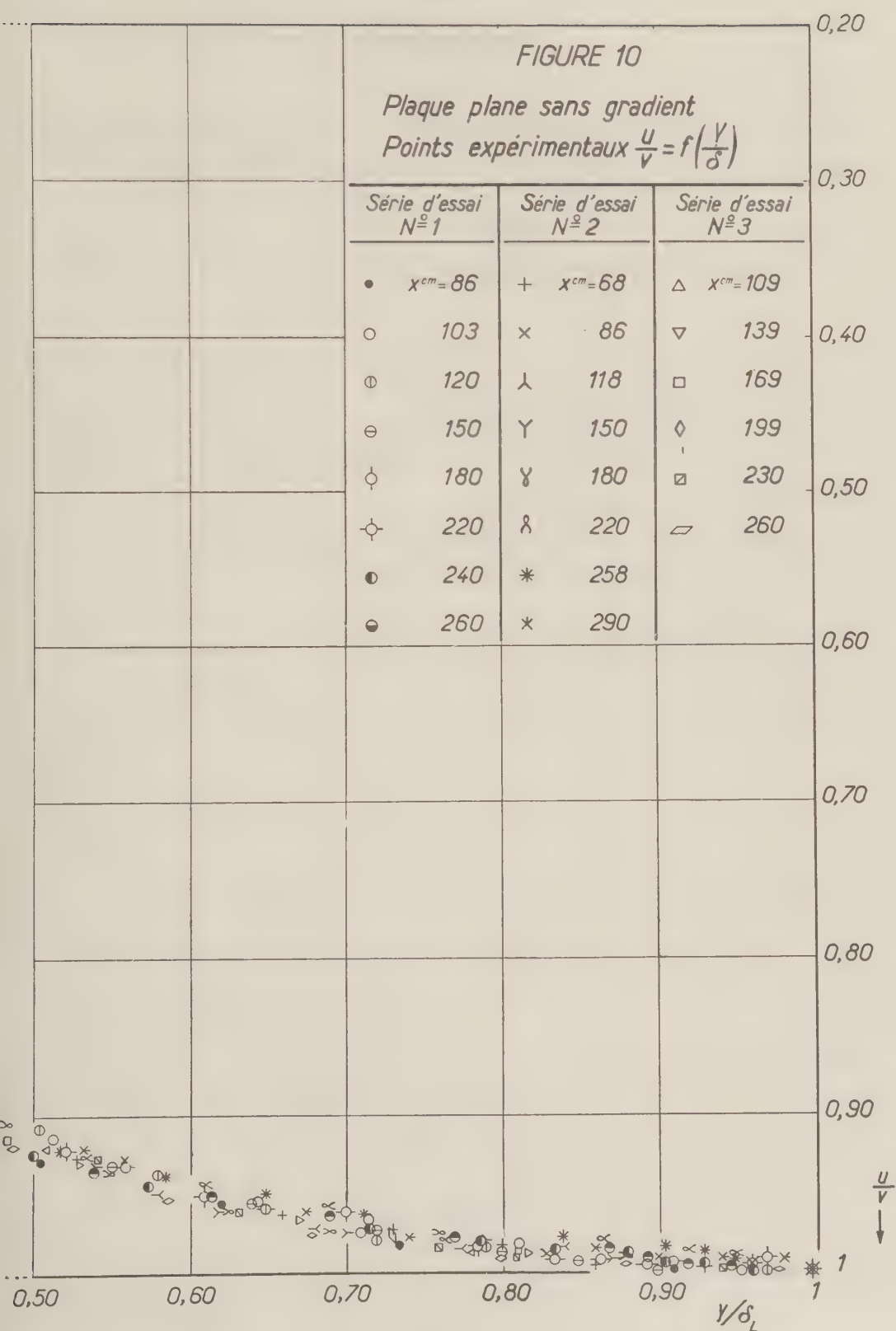


Fig. 10

CONCLUSION

Nous admettrons donc les conclusions suivantes :

1° L'épaisseur de quantité de mouvement, et les coefficients de frottement pour la plaque plane sans gradient de pression peuvent se représenter par les lois en puissance :

$$\frac{\delta^{**}}{x} = \frac{0,036}{R_x^{0,2}} \quad \text{cf} = \frac{0,0576}{R_x^{0,2}}$$

$$\text{cf} = \frac{0,072}{R_x^{0,2}}$$

2° Les profils de vitesses $\frac{u}{V_0} = f \frac{y}{\delta}$ sont semblables, et le paramètre de forme $H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$ est constant et égal à une valeur voisine de 1,30.

3° L'épaisseur de déplacement est alors proportionnelle à l'épaisseur de quantité de mouvement :

$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{0,0462}{R_x^{0,2}}$$

TROISIÈME PARTIE

LES COUCHES LIMITES TURBULENTES A RÉPARTITION DE PRESSION ET VITESSE POTENTIELLES VARIABLES

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS SUR LES COUCHES LIMITES TURBULENTES AVEC GRADIENTS DE PRESSION

Si le comportement des couches limites sans gradient de pression est somme toute assez bien connu, il n'en est plus de même dès qu'une distribution de vitesses et pressions non constantes est imposée aux couches limites turbulentes, celles-ci évoluant alors d'une façon totalement différente.

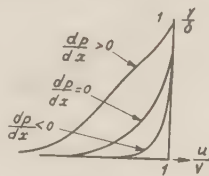
Le théorème des quantités de mouvement, appliqué aux couches limites sans gradient exprimait l'équilibre entre les forces de frottement dues à la viscosité et à la turbulence, et le débit de quantité de mouvement; pour une couche limite à vitesse potentielle variable, les forces de pression interviennent et le nouvel équilibre s'établissant est évidemment plus complexe.

1. Influence des gradients de pression sur le profil des vitesses.

Nous avons pu voir que, dans le cas du gradient nul, les profils de vitesses $\frac{u}{V} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$ étaient semblables; l'une des premières constatations expérimentales sur les couches limites turbulentes avec gradients de pression est qu'ils ne le sont plus :

La courbe $\frac{u}{V} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$ change progressivement de forme tout le long de la surface de contact, et le paramètre de forme H change de valeur.

Dans le cas d'une distribution de pressions à gradients positifs, c'est-à-dire pour des vitesses potentielles décroissantes suivant x , les vitesses dans la couche limite seront diminuées, et la courbe $\frac{u}{V} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$ voluera vers la gauche (figure ci-contre). Le paramètre de forme sera alors croissant; au voisinage de la paroi, les particules fluides, animées déjà de vitesses faibles et retardées encore par la distribution des vitesses potentielles, pourront même rebrousser chemin, et l'on observera alors le phénomène bien connu du décollement turbulent.



Dans le cas de gradients de pression négatifs, les vitesses dans la couche limites seront au contraire accrues; la courbe $\frac{u}{\bar{v}} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$ se déplacera vers la droite, et le paramètre de forme H sera décroissant.

2. Influence des gradients de pression sur les différentes épaisseurs.

L'épaisseur δ de la couche limite, ainsi que les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement évoluent également d'une façon différente; les lois en puissance constante ne sont plus valables.

D'une façon générale, un gradient de pression positif augmentera l'épaisseur de la couche limite en même temps que les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement qui seront, pour un même chemin parcouru, plus grandes que dans le cas du gradient nul.

Avec un gradient de pression négatif au contraire les épaisseurs croîtront moins vite que dans le cas du gradient nul, et l'on pourra même observer une décroissance de ces valeurs.

CHAPITRE II

EXPOSÉ ET DISCUSSION DES TRAVAUX ET MÉTHODES DE CALCULS ANTÉRIEURS SUR LES COUCHES LIMITES TURBULENTES AVEC GRADIENTS DE PRESSION

Tous les calculs de couches limites ont comme équation de base l'équation des quantités de mouvement :

$$\frac{\mathfrak{C}_0}{\rho V^3} = \frac{d\delta^{**}}{dx} - \frac{dp/dx}{\rho V^3} (2\delta^{**} + \delta^*)$$

ou :

$$\frac{\mathfrak{C}_0}{\rho V^3} = \frac{d\delta^{**}}{dx} - \frac{dp/dx}{\rho V^3} (H + 2) \delta^{**}$$

Cette équation montre que le frottement sur une paroi, résultant d'une couche limite soumise à une distribution de pressions potentielles données, sera connu dès que l'on aura déterminé tout le long de la paroi deux des grandeurs δ^{**} , δ^* et H .

La plupart des auteurs ayant traité de la question se sont attachés à calculer l'épaisseur de quantité de mouvement δ^{**} dont la connaissance est effectivement de la plus grande importance.

Le calcul du paramètre de forme H et de l'épaisseur de déplacement δ^* semble moins répandu : en ce qui concerne le paramètre de forme, les équations établies montrent qu'une approximation est souvent suffisante ; on le considère fréquemment comme constant, et SQUIRE et YOUNG ont prouvé qu'il était possible, moyennant cette hypothèse, de calculer la résistance de profil d'une aile avec une bonne précision, dès que l'on connaissait l'épaisseur de quantité de mouvement au bord de fuite.

Nous allons maintenant exposer et discuter les différentes méthodes de calcul des couches limites turbulentes avec gradients de pression.

1. Méthode Gruschwitz.

L'un des premiers et des plus importants documents sur les couches limites turbulentes nous est fourni par GRUSCHWITZ (réf. 9) qui propose une solution complète du problème, basée sur des expériences concernant une plaque soumise à différentes distributions et un profil d'aile à différentes incidences.

À l'équation des quantités de mouvement, qu'on écrira, en posant : $q = \rho/2 V^2$

$$(1) \quad \frac{\mathfrak{C}_0}{\rho V^3} = \frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{H+2}{2} \frac{\delta^{**}}{q} \frac{dq}{dx}$$

GRUSCHWITZ adjoint une seconde équation différentielle tirée de ses résultats expérimentaux, équation qui renferme δ^{**} et un nouveau paramètre de forme η relié à H .

Ce nouveau paramètre est $\eta = 1 - (u_1/V)^2$ u_1 étant la valeur de la vitesse à une distance $y = \delta^{**}$ de la paroi. Les résultats expérimentaux de GRUSCHWITZ montrent que η est fonction directe de H et nous en avons reproduit la courbe figure 12.

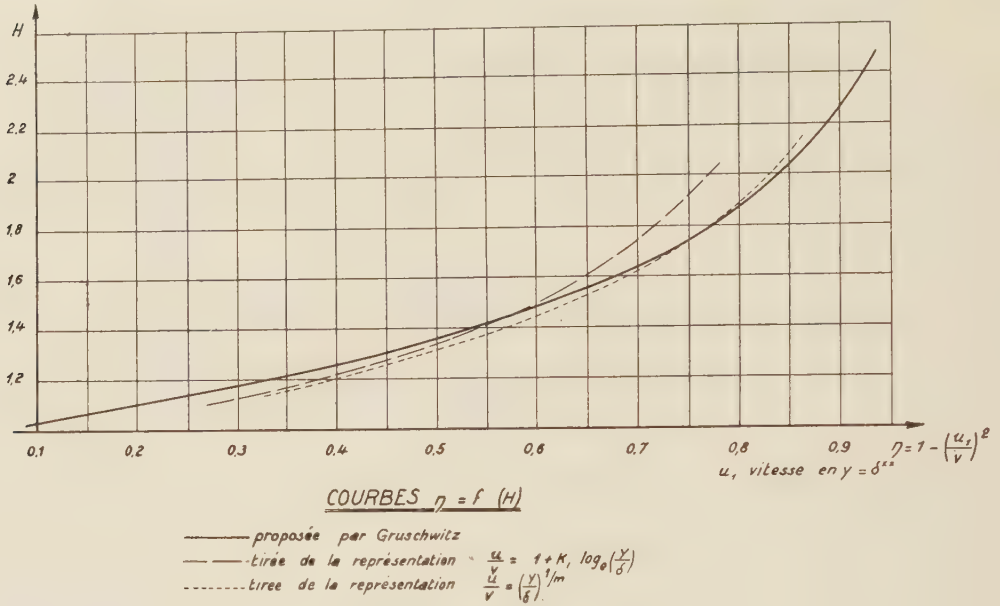


Fig. 12

P_1 étant alors la valeur de la pression totale en $y = \delta^{**}$ ($P_1 = p + \rho/2 u_1^2$), les expériences de GRUSCHWITZ montrent encore que le nombre $\frac{\delta^{**}}{q} \frac{dP_1}{dx}$ est fonction unique de η et l'on a :

$$\frac{\delta^{**}}{q} \frac{dP_1}{dx} = a\eta - b \text{ avec } a = 0.00894 \quad b = 0.00461.$$

Posant alors $\varphi = P_0 - P_1$ P_0 étant la valeur constante de la pression totale potentielle on a :

$$\varphi = P_0 - P_1 = p + \rho/2 V^2 - p - \rho/2 u_1^2 = q\eta$$

or

$$\frac{dP_0}{dx} = 0 \quad \frac{d\varphi}{dx} = - \frac{dP_1}{dx} \text{ et (2) devient}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} + 0.00894 \frac{\varphi}{\delta^{**}} = 0.00461 \frac{q}{\delta^{**}}.$$

On a donc à résoudre le système :

$$\begin{cases} (1) & \frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{H+2}{2} \frac{\delta^{**}}{q} \frac{dq}{dx} = \frac{\mathfrak{E}_0}{\rho V^2} \\ (2) & \frac{d\varphi}{dx} + 0.00894 \frac{\varphi}{\delta^{**}} = 0.00461 \frac{q}{\delta^{**}}. \end{cases}$$

On opérera par approximations successives de la façon suivante : supposant d'abord H et $\mathfrak{C}_0/\rho V^2$ constants (GRUSCHWITZ propose $H = 1,5$ et $\mathfrak{C}_0/\rho V^2 = 0,002$), l'équation (1) se présente comme une équation différentielle linéaire du premier ordre en δ^{**} , équation qu'on résoudra pour obtenir une première approximation $\delta^{**}_1(x)$.

Introduisant $\delta^{**}_1(x)$ dans l'équation (1) celle-ci se présentera à son tour comme une équation différentielle du premier ordre en φ équation qu'on résoudra pour obtenir une première approximation $\varphi_1(x)$ d'où on tirera une première approximation pour $H : H_1(x)$ par la relation $\eta = f_1(H)$ expérimentale de la courbe figure 12.

Il suffira alors de reporter cette première approximation dans l'équation (1) et de la résoudre en posant cette fois $\frac{\mathfrak{C}_0}{\rho V^2} = \frac{0,01255}{\left(\frac{\delta^{**}}{\nu}\right)^{1/4}}$ (valeur pour la plaque plane) et l'on

obtiendra ainsi une deuxième approximation pour δ^{**} qui suffira généralement ; on pourra à nouveau porter cette deuxième approximation dans l'équation (2) ce qui donnera une deuxième approximation pour φ η et H .

Remarque. — Pour pouvoir résoudre les équations différentielles (1) et (2) il faut se donner une valeur initiale pour δ^{**} et φ ; on pourra se donner pour δ^{**} la valeur au point de transition obtenue par le calcul de la couche limite laminaire antérieure. En ce qui concerne φ , GRUSCHWITZ propose comme valeur initiale $\varphi = 0,1$ q , 0,1 étant la valeur initiale choisie pour η .

Enfin, d'après GRUSCHWITZ, le décollement turbulent a lieu pour $\eta = 0,8$ soit $H = 1,866$.

Observations sur la méthode GRUSCHWITZ. — La méthode GRUSCHWITZ qui fut longtemps la seule employée pour le calcul des couches limites turbulentes a généralement donné de bons résultats sauf peut-être en ce qui concerne la prévision de la position du décollement.

Elle présente l'inconvénient d'être assez longue à cause de la nécessité d'approximations successives.

En ce qui concerne l'interdépendance entre les paramètres H et η nous ferons la remarque suivante : le fait que H et η soient liés par une relation, signifie qu'il existe une certaine forme du profil des vitesses : dès que nous représenterons par une équation le profil des vitesses, nous verrons apparaître une relation entre H et η ; nous raisonnerons très simplement sur deux exemples.

I. Supposons que nous représentions la courbe des vitesses par une loi $\frac{u}{V} = 1 + K_1 \log_e \left(\frac{y}{\delta} \right)$ K_1 étant cette fois variable avec x et dépendant de la distribution des pressions.

Les relations $\delta^* = K_1 \delta$ et $\delta^{**} = K_1(1-2 K_1) \delta$ restent valables, et la vitesse en $y = \delta^{**}$ est donnée par :

$$\frac{u_1}{V} = 1 + K_1 \log_e K_1 (1 - 2 K_1) \quad \text{or : } K_1 = \frac{H-1}{2 H}$$

donc :

$$\frac{u_1}{V} = 1 + \frac{H-1}{2 H} \log_e \left(\frac{H-1}{2 H^2} \right)$$

qui donne pour cette représentation la relation entre η et H :

$$\eta = 1 - \left(\frac{u_1}{V}\right)^2 = 1 - \left[1 + \frac{H-1}{2H} \log_e \frac{H-1}{2H^2}\right]^2$$

II. Représentons maintenant le profil des vitesses par une loi $\frac{u}{V} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/m}$ m étant également variable avec x et dépendant de la distribution des pressions; nous aurons :

$$\delta^{**} = \delta \frac{m}{(m+1)(m+2)} \quad \delta^* = \frac{\delta}{m+1} \quad m = \frac{2}{H-1}$$

et

$$\frac{u_1}{V} = \left(\frac{\delta^{**}}{\delta}\right)^{1/m} = \left[\frac{m}{(m+1)(m+2)}\right]^{1/m} = \left[\frac{H-1}{H(H+1)}\right]^{\frac{H-1}{2}}$$

$$\eta = 1 - \left(\frac{u_1}{V}\right)^2 = 1 - \left[\frac{H-1}{H(H+1)}\right]^{H-1}$$

Nous avons comparé figure 12 les courbes ainsi obtenues par ces deux représentations à celle donnée par GRUSCHWITZ; on voit qu'elles en diffèrent relativement peu.

2. Méthode Buri.

Cette méthode (réf. 10) donne comme base au calcul des couches limites turbulentes avec gradients de pression, les résultats sur la plaque plane sans gradient.

Nous avons vu que le coefficient de frottement local sur la plaque plane était donné par :

$$\frac{\tau_0}{\rho V^2} = C \left(\frac{V_0 \delta}{\nu}\right)^{-1/4} \quad \text{avec } C = 0,0225$$

égalité que l'on peut transformer en :

$$\frac{\tau_0}{\rho V^2} = C \left(\frac{\delta^{**}}{\delta}\right)^{1/4} \left(\frac{V_0 \delta^{**}}{\nu}\right)^{-1/4}$$

Le profil étant constant, on obtient en admettant la répartition :

$$\frac{u}{V_0} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad \left(\frac{\delta^{**}}{\delta}\right)^{1/4} = 0,558$$

et l'on a donc :

$$\frac{\tau_0}{\rho V^2} = 0,01255 \left(\frac{V_0 \delta^{**}}{\nu}\right)^{-1/4}$$

(on notera que l'adoption de la loi $u/V_0 = 1 + 0,118 \log_e (y/\delta)$ donnerait :

$$\delta^{**} = K_1(1 - 2 K_1)\delta = 0,0902 \delta \quad \left(\frac{\delta^{**}}{\delta}\right)^{1/4} = 0,550 \quad \frac{\tau_0}{\rho V_0^2} = 0,0235 \left(\frac{V_0 \delta^{**}}{\nu}\right)^{-1/4}.$$

Pour les couches limites avec gradients, BURI admet toujours : $\frac{\mathfrak{C}_0}{\rho V^3} = C \left(\frac{V\delta}{\nu} \right)^{-1/4}$, mais si l'on veut passer au nombre de DE REYNOLDS $\frac{V\delta^{**}}{\nu}$ on devra écrire :

$$(3) \quad \frac{\mathfrak{C}_0}{\rho V^3} = C \xi \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{-1/4}$$

$\xi = \left(\frac{\delta^{**}}{\delta} \right)^{1/4}$ n'étant plus constant, mais variant avec la forme du profil des vitesses.

Il devient donc nécessaire de voir quelles sont les grandeurs agissant sur la forme du profil des vitesses.

Considérons d'abord le paramètre de forme $\Pi = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$. Nous avons vu que, pour la plaque plane sans gradient la constance de Π entraînait la constance du profil des vitesses et réciproquement.

Ceci n'est en somme qu'une constatation géométrique :

La courbe $\frac{u}{V_\infty} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$ est telle que si le rapport $\frac{\delta^*}{\delta^{**}} = \frac{\int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{V_\infty}\right) dy}{\int_0^{\delta^{**}} \left(1 - \frac{u}{V_\infty}\right) dy}$ est constant, la fonction $f\left(\frac{y}{\delta}\right)$ est invariable.

Nous admettrons qu'il en est de même pour les couches limites avec gradients de pression.

Π est alors un paramètre de forme que nous qualifierons de «géométrique». ξ est également un paramètre de forme géométrique ainsi que le paramètre de GRUSCHWITZ : $\eta = 1 - \left(\frac{u_1}{V}\right)^2$.

Nous allons maintenant chercher quelles sont les grandeurs «agissant» sur l'évolution de la forme du profil des vitesses et conséquemment sur Π .

La forme du profil des vitesses peut dépendre à priori des pressions, longueurs ou chemins parcourus; du frottement, etc.

S'il est possible de combiner ces différentes grandeurs en une expression (sans dimension) dont la constance entraîne celle du profil des vitesses (donc de Π , ξ et η), cette expression sera un paramètre de forme que nous qualifierons cette fois de «physique».

Ainsi d'après BURI, c'est essentiellement la distribution du frottement interne qui régit la forme du profil des vitesses : cette répartition s'écrit : $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0} = 1 + B \frac{y}{\delta} + \dots$, et le paramètre de forme de BURI est le coefficient B.

L'équation $\rho \left(u \frac{du}{dx} + v \frac{dv}{dy} \right) = \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial y} - \frac{dp}{dx}$ donne : $\left(\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{dp}{dx}$.

Or :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y}\right)_o = \frac{\mathcal{C}_o}{\delta} B$$

d'où :

$$B = \frac{\delta}{\mathcal{C}_o} \frac{dp}{dx}$$

On a encore :

$$\frac{\mathcal{C}_o}{\rho V^2} = C \left(\frac{V\delta}{\nu}\right)^{1/4}$$

$$B = C\delta \left(\frac{V\delta}{\nu}\right)^{1/4} \frac{dp}{dx} = C \frac{\delta}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta}{\nu}\right)^{1/4}.$$

Le paramètre de forme de BURI est donc : $\frac{\delta}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta}{\nu}\right)^{1/4}$; la constance de $\frac{\delta}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta}{\nu}\right)^{1/4}$ entraînera la constance du profil des vitesses et des paramètres H et ξ ; le nombre $\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu}\right)^{1/4} = \frac{\delta}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta}{\nu}\right)^{1/4} \left(\frac{\delta^{**}}{\delta}\right)^{5/4} = \frac{\delta}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta}{\nu}\right)^{1/4} \xi^{5/4}$ restera donc constant en même temps que $\frac{\delta}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta}{\nu}\right)^{1/4}$, et sera aussi paramètre de forme; c'est sous cette forme qu'il a été finalement adopté par BURI et dénommé Γ_1 :

$$\Gamma_1 = \frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu}\right)^{1/4}.$$

L'équation des quantités de mouvement donne alors :

$$\frac{\mathcal{C}_o}{\rho V^2} = C\xi \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu}\right)^{1/4} \left[\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{1}{V} \frac{dV}{dx} (\delta^{**} + 2\delta^{**}) \right].$$

En multipliant par $\left(\frac{V\delta^{**}}{\nu}\right)^{1/4}$ puis ajoutant $\frac{1}{5} \frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu}\right)^{1/4}$ BURI obtient :

$$C\xi = \frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu}\right)^{1/4} \left[\frac{9}{5} + \frac{\delta^{**}}{\delta^{**}} \right] + \frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu}\right)^{1/4} + \frac{1}{5} \frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu}\right)^{1/4} = \frac{4}{5} \frac{d}{dx} \left[\delta^{**} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu}\right)^{1/4} \right]$$

$$C\xi = \Gamma_1 \left(\frac{9}{5} + H \right) = \frac{4}{5} \frac{d}{dx} \left[\delta^{**} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu}\right)^{1/4} \right].$$

Si Γ_1 est réellement paramètre de forme, ξ et H ne sont fonctions que de lui; le membre de gauche de l'équation (4) doit se réduire à une fonction de Γ_1 .

Effectivement, les expériences de BURI montrent que : $C\xi - \Gamma_1 \left(\frac{9}{5} + H \right) = a - b\Gamma_1$ avec $a = 0,01475$, $b = 3,945$, des expériences de DÖVSCHE et NIKURADSE donnant : $a = 0,017$.

Il ne reste plus alors qu'à poser : $z = \delta^{**} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4} \Gamma_1 = \frac{1}{V} \frac{dV}{dx} z$ et l'équation (4) devient : $a - \frac{b}{V} \frac{dV}{dx} z = \frac{4}{5} \frac{dz}{dx}$ équation différentielle linéaire du premier ordre qu'on intégrera à partir d'une valeur originale connue pour δ^{**} .

Observations sur la méthode Buri.

Les valeurs 0,01475 et 0,017 trouvées par BURI et d'après NIKURADSE pour le coefficient a apparaissent comme assez illogiques.

Revenant, en effet, au cas du gradient nul en faisant : $\frac{dV}{dx} = 0$, $C\xi - \Gamma_1 \left(\frac{9}{5} + H \right) = a - b\Gamma_1$ devient $C\xi = a$ la valeur de a est ainsi déterminée : $a = 0,01255$ comme on l'a vu pour la plaque plane.

Par ailleurs, la valeur du coefficient b est bien incertaine, les expériences de NIKURADSE indiquant une valeur voisine de 5 (on aurait $b = 4,75$ pour les gradients de pression négatifs, $b = 5,25$ pour les gradients positifs).

En ce qui concerne le point de décollement, ce dernier devrait correspondre à une valeur de Γ_1 comprise entre $-0,05$ et $-0,09$.

Toutes ces incertitudes font de la méthode BURI, à priori plus tentante parce que plus rapide, un moyen de calcul moins précis et moins sûr que celui résultant des travaux de GRUSCHWITZ.

3. Méthode Nikuradsé.

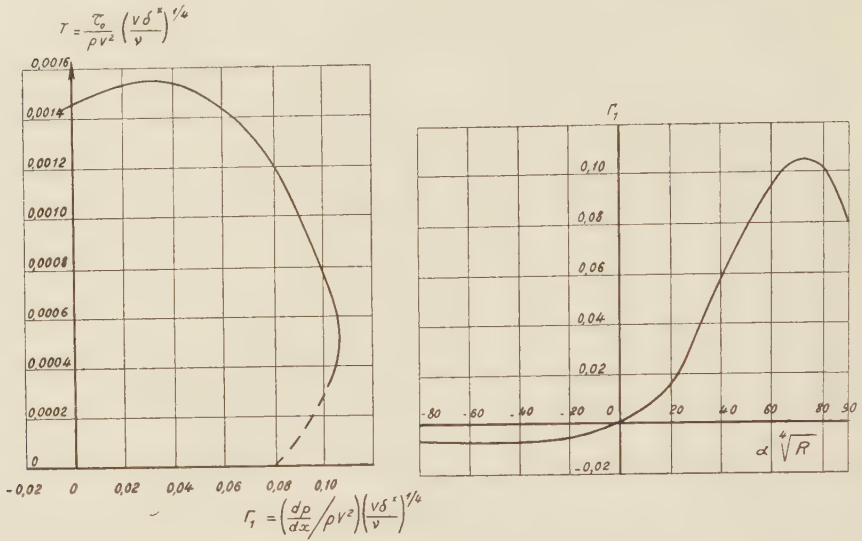
NIKURADSE, à partir d'essais sur l'écoulement de l'eau dans des canaux plans divergents et convergents propose la méthode suivante (réf. 11) :

Il définit d'abord un paramètre relatif au frottement : $T = \frac{\tau_0}{\rho} \frac{\delta^{*1/4}}{V^{7/4} \nu^{1/4}} = \frac{\tau_0}{\rho V^2} \left(\frac{V\delta^*}{\nu} \right)^{1/4}$ V étant la vitesse au centre, $\delta^* = \int_0^b \left(1 - \frac{y}{b} \right) dy$ (b demi-largeur du canal entre les parois divergentes).

Il définit, ensuite, un paramètre relatif au gradient de pression :

$$\Gamma = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \frac{\delta^{*1/4}}{V^{7/4} \nu^{1/4}} = \frac{\delta^{*dp/dx}}{\rho V^2} \left(\frac{V\delta^*}{\nu} \right)^{1/4}$$

De ses expériences il résulte que T et Γ sont liés par une relation, et NIKURADSE en a donné la courbe que nous avons reproduite figure 13.



Relations de Nikuradse' (§ 3)

Fig. 13

Par ailleurs, Γ s'obtient en fonction de l'angle d'ouverture du canal α et du nombre de Reynolds $\frac{Ub}{\nu} = R$ (U vitesse moyenne = $\frac{Q}{S}$) par une courbe tirée elle aussi des expériences de NIKURADSE : $\Gamma = f(\alpha R^{1/4})$ voir figure 13.

Il est ainsi possible de déterminer $T = \frac{C_0}{\rho V^2} \left(\frac{V \delta^*}{\nu} \right)^{1/4}$.

D'après NIKURADSE $\frac{\delta^*}{b}$ et $\frac{U}{V}$ sont constants, on a alors $T = K \frac{C_0}{\rho U^2} \left(\frac{Ub}{\nu} \right)^{1/4}$ ce qui permet d'obtenir C_0 .

4. Méthode Lees.

Dans un travail plus récent (réf. 12), LEES reprenant les essais sur une plaque soumise à différentes distributions de pression, propose la méthode suivante :

De même que pour la plaque plane sans gradient on a pu exprimer le rapport $\frac{\delta^{**}}{x}$ sous forme d'une fonction puissance du nombre de Reynolds $\frac{\delta^{**}}{x} = \frac{A}{R_x^n}$, on posera que l'épaisseur de quantité de mouvement pour une couche limite avec gradients de pression peut s'écrire : $\frac{\delta^{**}}{x} = \frac{K}{R_x^b}$, K et b étant cette fois variables avec x et dépendants de la distribution des pressions potentielles.

D'après LEES cette distribution intervient par le paramètre : $G(x) = \frac{x}{q} \frac{dq}{dx} = q - \frac{\rho}{2} V^2$
 et K et b sont des fonctions de $G(x)$ que LEES a tirées de ses expériences. Nous les avons représentées figure 14.

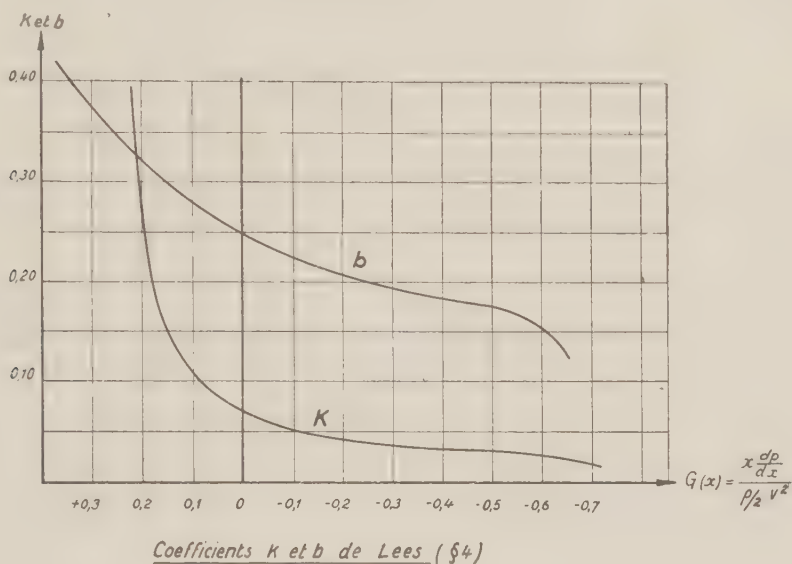


Fig. 14

x est la distance à l'origine de la couche limite turbulente.

Par ailleurs, le paramètre $G(x)$ régit aussi la forme du profil des vitesses et le paramètre de forme $H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$ n'est fonction que de $G(x)$.

Les expériences de LEES donneraient :

$$H = 1,29 - 0,46 G(x).$$

Considérant alors l'équation des quantités de mouvement :

$$\frac{\bar{c}_e}{\rho V^2} = \frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{H+2}{2} \frac{\delta^{**}}{q} \frac{dq}{dx}$$

ou

$$cf = \frac{\bar{c}_e}{\rho/2 V^2} = 2 \frac{d\delta^{**}}{dx} + (H+2) \frac{\delta^{**}}{x} G(x)$$

$G(x)$ étant connu, il ne reste plus pour connaître cf qu'à déterminer $\frac{d\delta^{**}}{dx}$.

LEES dérive δ^{**} en maintenant $G(x)$ [donc K et b] constants ce qui lui donne

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{K}{R_x^b} \left[(1-b) - \frac{b}{2} \frac{x}{q} \frac{dq}{dx} \right]$$

$$cf = \frac{K}{R_x^b} \left[2(1-b) - bG(x) + (H+2)G(x) \right]$$

$$cf = \frac{K}{R_x^b} \left[2(1-b) + (3,29-b)G(x) - 0,46G(x)^2 \right]$$

Observations sur la méthode Lees.

A notre avis, de grandes réserves doivent être faites sur cette méthode pour les raisons suivantes :

1. L'affirmation $H = 1,29 - 0,46 G(x)$ est très douteuse; l'observation du graphique où LEES a porté H en fonction de $G(x)$ montre une dispersion très grande des points expérimentaux et la loi qu'en a tirée l'auteur apparaît comme assez téméraire;

2. Il ne nous semble pas logique de maintenir $G(x)$ constant dans la dérivation de δ^{**} ; $G(x)$ est une fonction a priori inconnue de x et il en est donc de même de K et b ; on doit en toute rigueur différencier en considérant K et b comme fonctions expérimentales de x ; la différenciation ne peut alors être que graphique et présente le grave inconvénient de présenter des termes en $\frac{dG}{dx}$ c'est-à-dire en $\frac{d^2p}{dx^2}$.

En tout cas les lois simples trouvées pour cf ne peuvent être considérées que comme des approximations qu'il conviendrait de justifier;

3. Les courbes $K=f[G(x)]$, $b=f[G(x)]$ devraient nous redonner pour $\frac{dV}{dx}=0$ soit $G=0$, pour δ^{**} et pour cf des valeurs voisines de celles classiques admises pour la plaque plane: il n'en est rien puisque, d'après ces courbes on a pour $G(x)=0$: $K=0,070$ et $b=0,25$, ce qui donne :

$$\frac{\delta^{**}}{x} = \frac{0,070}{R_x^{0,25}}, \quad \frac{\mathfrak{C}_0}{\rho V^2} = \frac{0,0525}{R_x^{0,25}}$$

On peut voir sur la figure 1 que les $\frac{\mathfrak{C}_0}{\rho V^2}$ ainsi obtenus diffèrent sensiblement des valeurs données par les autres auteurs.

5. Méthode Squire-Young (référence 13).

Partant encore de l'équation des quantités de mouvement, SQUIRE et YOUNG font intervenir entre $\mathfrak{C}_0$, V et δ^{**} une relation qui est celle valable pour la plaque plane.

Posant $\frac{\mathfrak{C}_0}{\rho V^2} = \frac{1}{\varphi}$, la formule de KARMAN pour le frottement sur la plaque plane (formule 13, p. 18) peut s'écrire :

$$\varphi = A + B \log \left(\frac{Vx}{\nu} \cdot \frac{1}{\varphi} \right)$$

Cette formule jointe à l'équation des quantités de mouvement pour la plaque plane :

$$\frac{\mathcal{C}_0}{\rho V^2} = \frac{d\delta^{**}}{dx} \text{ donne } \frac{V\delta^{**}}{\nu} = 0,2454 e^{0,3914\varphi}$$

que SQUIRE et YOUNG ré-introduisent dans l'équation des quantités de mouvement pour obtenir :

$$\frac{d\varphi}{dx} + 6,13 \frac{dV/dx}{V} = 10,411 \frac{V e^{-0,3914\varphi}}{V\varphi^2}$$

En admettant alors $H = 1,4$ cette équation devient :

$$\frac{d\varphi}{dx} + 6,13 \frac{dV/dx}{V} = \frac{V}{\nu} F(\varphi)$$

équation différentielle en φ qu'on intégrera par approximations successives ou par un procédé graphique. Comme valeur de départ à cette intégration on prendra la valeur de φ au point de transition qui sera donnée par l'équation $\frac{V\delta^{**}}{\nu} = 0,2454 e^{0,3914\varphi}$ quand on aura calculé l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite laminaire jusqu'au point de transition.

6. Examen général des méthodes exposées.

Nous avons vu que la méthode GRUSCHWITZ, donnant de bons résultats pour le calcul des couches limites turbulentes, présentait l'inconvénient d'être assez longue du fait de la nécessité d'approximations successives.

Il en est de même de la méthode SQUIRE-YOUNG, somme toute assez analogue à la méthode GRUSCHWITZ, puisqu'elle consiste à introduire dans l'équation des quantités de mouvement les relations valables pour la plaque plane en ce qui concerne δ^{**} et H (ou tout au moins en ce qui concerne la constance de H).

La méthode NIKURADSE semblant devoir être mise à part parce que concernant certains cas bien déterminés d'écoulements, il est remarquable de constater que seul LEES donne pour le calcul des couches limites turbulentes avec gradients de pression une méthode directe permettant de relier coefficient de frottement, épaisseur de quantité de mouvement et paramètre de forme à un paramètre essentiellement local caractéristique de l'écoulement :

$$\frac{x}{q} \frac{dq}{dx}$$

Nous avons en tout cas vu apparaître différentes grandeurs caractéristiques de l'écoulement turbulent; chaque auteur a donné son paramètre de forme et la relation qui lui a permis d'intégrer l'équation des quantités de mouvement, mais ce qui frappe dans un examen général, est que toutes ces relations et tous ces paramètres pourtant tirés d'expériences semblables apparaissent comme absolument distincts.

Il nous a donc semblé intéressant de comparer entre eux les différents paramètres et relations fournis dans les travaux exposés et nous verrons que c'est là l'idée générale qui nous guidera dans l'exploitation de nos résultats expérimentaux.

Un premier exemple nous montrera l'intérêt d'une telle confrontation :

Considérons le paramètre de forme de BURI $\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V \delta^{**}}{v} \right)^{1/4} = \Gamma_1$ et celui de LEES $G = \frac{x}{q} \frac{dq}{dx}$. Si l'on admet à la fois que $\frac{x}{q} \frac{dq}{dx}$ et $\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V \delta^{**}}{y} \right)^{1/4}$ soient paramètres de formes

il existera une relation les reliant l'un à l'autre. Cette relation une fois connue, le problème du calcul de l'épaisseur de quantité de mouvement serait directement résolu. Ceci serait évidemment inespéré, et nous verrons que la question ne se résout pas aussi simplement.

C'est, toutefois, par la recherche de liens entre les différents résultats précédents que nous essaierons de traiter le problème des couches limites turbulentes avec gradients de pression.

CHAPITRE III

PARTIE EXPÉRIMENTALE SUR LES COUCHES LIMITES TURBULENTES AVEC GRADIENTS DE PRESSION POSITIFS

Programme des essais.

L'application la plus importante d'une étude sur les couches limites turbulentes avec gradients de pression est le calcul du frottement local et global ainsi que de la résistance de profil des ailes d'avions.

Il est reconnu expérimentalement, que, pour une surface aérodynamiquement lisse, la transition de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent se situe toujours en arrière du point de vitesse maximum et les couches limites turbulentes s'établissant sur un profil d'aile seront des couches limites retardées c'est-à-dire soumises à une distribution de vitesses potentielles décroissantes.

Nous avons donc borné notre programme expérimental sur les couches limites turbulentes au cas des couches limites avec gradients de pression positifs.

Nous nous sommes alors proposé un programme en deux parties :

A. Étude des couches limites turbulentes sur une plaque soumise à différentes distributions de pression croissante. Cette première étude est destinée, d'une part, à éviter l'influence éventuelle de paramètres à priori étrangers aux gradients de pression et spéciaux aux profils d'aile (par exemple la courbure) ; d'autre part, elle permet de réaliser des distributions quelconques et offre une longueur de parcours importante donnant des nombres de Reynolds R_x qu'il aurait été impossible d'obtenir sur les profils passés usuellement dans les souffleries de l'institut de Saint-Cyr ;

B. Études des couches limites turbulentes s'établissant sur des profils d'aile braqués à différentes incidences.

CHAPITRE III-A

ESSAIS SUR LA PLAQUE
SOUmise A DIFFÉRENTES DISTRIBUTIONS DE PRESSION

1. Matériel expérimental.

Ce matériel a déjà été décrit (deuxième partie, p. 31), c'est celui nous ayant servi aux essais sur la plaque plane sans gradient; nous renvoyons donc à la page 31 pour sa description détaillée.

Le collecteur utilisé est le collecteur B (dessin fig. 6), le tube de pression totale servant à l'exploration des couches limites étant le tube d'ouverture 0,1 mm.

Les distributions de pression ont été obtenues par réglage de la paroi opposée à la plaque.

2. Mesure des pressions statiques.

La mesure des pressions statiques a encore été effectuée au moyen de la longue sonde recourbée comme il a été décrit page 37.

Nous avons pratiquement toujours vérifié la constance de la pression dans une section; toutefois, nous avons parfois noté, dans une région suivant immédiatement la jonction de la plaque avec le collecteur, une légère évolution de la pression statique perpendiculairement à la plaque; dans ce cas nous avons adopté comme valeur de la pression, celle donnée par la prise placée au voisinage de la plaque.

3. Distributions de pression 1, 2, 3.

Désirant connaître l'évolution d'une couche limite turbulente s'étant développée avec gradient nul sur une certaine longueur, lorsqu'on lui impose ensuite, une pression potentielle croissante, nous avons conservé au premier mètre la divergence 185 à 205 mm de la paroi supérieure destinée à assurer une distribution uniforme de la pression; nous avons obtenu des distributions croissantes de la pression sur les deux mètres suivants par simple divergence de la paroi supérieure.

Nous avons ainsi réalisé les distributions 1, 2 et 3 qui sont représentées planche 5 sous la forme $\frac{p - p_0}{\rho/2 V_0^2} = f(x)$, p_0 et V_0 étant les valeurs de la pression et de la vitesse dans le premier mètre.

Résultats obtenus.

Distribution 1 : les courbes $\frac{u}{V} = f(y)$ pour les différentes explorations sont représentées planche 6.

Les valeurs correspondantes des épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement δ^* et δ^{**} ainsi que de leur rapport H sont données dans le tableau 4.

Distribution 2 : courbes $\frac{u}{V} = f(y)$ planche 7 ; δ^* , δ^{**} et H tableau 5.

Distribution 3 : courbes $\frac{u}{V} = f(y)$ planche 8 ; δ^* , δ^{**} et H tableau 6.

4. Distributions de pression 4, 5, 6, 7, 8.

Les distributions 4, 5, 6, 7, 8 concernent des couches limites turbulentes soumises à des pressions potentielles croissantes dès leur origine.

Les distributions 4 et 5 ont été obtenues par divergences linéaires de la paroi supérieure,

Pour la distribution 4 la paroi supérieure diverge de 185 mm à 320 mm sur le premier mètre, de 320 mm à 465 mm sur les deux suivants.

Pour la distribution 5 la paroi supérieure diverge de 185 mm à 250 mm sur le premier mètre, de 250 à 465 mm sur les deux derniers mètres.

Les distributions 6, 7, 8 ont été réalisées par déformation continue de la paroi supérieure alors composée d'une plaque de tôle.

Les distributions 4, 5, 6, 7, 8 sont représentées planche 9 où sont données les courbes de $\frac{p - p_0}{\rho_{1/2} V_0^2}$ en fonction de x , p_0 et V_0 étant la pression et la vitesse à la frontière de la couche limite de la plaque dans la section d'entrée (jonction collecteur-plaque).

Résultats obtenus.

Distribution 4 : Les courbes $\frac{u}{V} = f(y)$ sont représentées planche 10.

Les valeurs des épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement δ^* et δ^{**} et du paramètre de forme H correspondantes sont données dans le tableau 7.

Distribution 5 : courbes $\frac{u}{V} = f(y)$ planche 11, δ^* , δ^{**} et H tableau 8.

Distribution 6 : courbes $\frac{u}{V} = f(y)$ planche 12, δ^* , δ^{**} et H tableau 9.

Distribution 7 : courbes $\frac{u}{V} = f(y)$ planche 13, δ^* , δ^{**} et H tableau 10.

Distribution 8 : courbes $\frac{u}{V} = f(y)$ planche 14, δ^* , δ^{**} et H tableau 11.

Tous ces essais concernent des couches limites turbulentes au départ.

Pour les distributions 1, 2, 3, 4, 5, ce résultat a été obtenu simplement grâce à l'existence d'une légère saillie de la plaque à sa jonction avec le collecteur.

Pour les distributions 6 et 7, le réglage de la paroi supérieure ayant été obtenu par déformation d'une plaque de tôle, la jonction de cette tôle avec le collecteur a été réalisée par une cornière à angle droit; dans ces conditions, il existe une première partie à hauteur constante de la veine et la pression y est décroissante. Les premières explorations de couches limites ont montré que la saillie de la plaque ne suffisait plus à déclencher l'écoulement turbulent ou qu'en tout cas on avait affaire à une transition plus longue. Nous avons alors placé un fil perturbateur de diamètre 0,5 mm transversalement à la plaque à une distance $x = 5$ cm de la fin du collecteur et admis que l'origine de la couche limite turbulente était fixée à cet endroit.

Pour tous ces essais les vitesses d'essais étaient les suivantes :

- Distribution 1, $V_0 = 26$ m/s;
 - Distribution 2, $V_0 = 26$ m/s;
 - Distribution 3, $V_0 = 26$ m/s;
 - Distribution 4, $V_0 = 28,2$ m/s;
 - Distribution 5, $V_0 = 28,5$ m/s;
 - Distribution 6, $V_0 = 28,2$ m/s;
 - Distribution 7, $V_0 = 29,2$ m/s;
 - Distribution 8, $V_0 = 27,4$ m/s.
-

CHAPITRE III B

ESSAIS SUR PROFILS

Outre les couches limites de la plaque soumise aux différentes distributions de pression, nous avons également étudié les couches limites turbulentes s'établissant sur les profils d'ailes.

Nos essais ont porté sur deux profils de types différents : l'un, dénommé profil A, étant un profil assez ancien, à maître couple avancé; l'autre, dénommé profil B, étant un profil plus laminaire, à maître couple relativement reculé.

1. Soufflerie. Dispositif expérimental.

Ces deux profils ont été expérimentés dans la soufflerie n° 1 de l'Institut aérotechnique de Saint-Cyr, soufflerie par aspiration du type EIFFEL, à veine guidée, de diamètre : 2 m, de longueur : 6 m;

L'aménagement de la soufflerie en veine rectangulaire, correspondant aux conditions d'un écoulement plan, a été réalisé par le montage dans la veine de panneaux verticaux espacés de 0,80 m.

Les profils ont été montés entre ces panneaux, la variation d'incidence étant obtenue par rotation autour du bord d'attaque fixé à mi-hauteur entre plafond et plancher.

En ce qui concerne la turbulence de la soufflerie, elle est caractérisée par le nombre de REYNOLDS critique obtenu par les pressions sur la sphère.

Pour les essais sur le profil A le nombre de REYNOLDS critique était de 284.000.

Pour les essais sur le profil B, un grillage à mailles fines ayant été placé devant le collecteur, le nombre de REYNOLDS critique est alors passé à la valeur 314.000.

Les couches limites ont été explorées au moyen du même tube de pression totale que pour les essais sur la plaque; ce tube, renfermé dans un carénage sur sa plus grande partie, a été introduit par le plafond et déplacé perpendiculairement à la paroi du profil au moyen du chariot à vis micrométrique.

Le carénage renfermant le tube de pression totale a permis d'éliminer pratiquement toutes les vibrations et d'obtenir dans les distances à la paroi une précision analogue à celle obtenue pour les essais sur la plaque c'est-à-dire de l'ordre du 1/20 de millimètre.

Le schéma du montage en soufflerie des profils et du dispositif explorateur des pressions totales dans les couches limites est représenté figure 15.

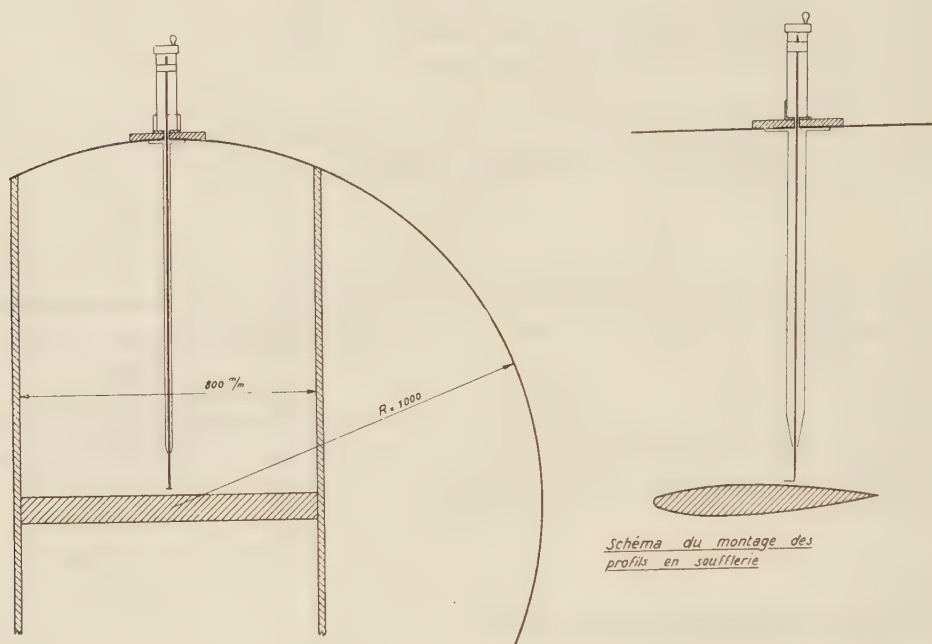


Fig. 15

2. Mesure des pressions sur les profils.

Les pressions sur les profils ont été mesurées au moyen d'une prise statique lècheuse.

La prise constituée d'un tube de laiton de diamètre extérieur : 1,6 mm, de diamètre intérieur : 1 mm, est percée de deux trous latéraux de diamètre : 0,5 mm.

Elle est reliée au moyen d'un système de tiges articulées à un chariot à vis sans fin placé contre l'un des panneaux et qui en permet le déplacement sur le profil parallèlement à la corde.

Cette technique d'essai remplace de plus en plus fréquemment à Saint-Cyr la mesure des pressions par trous de paroi; les tarages de différentes prises ont montré une différence toujours faible entre les coefficients de pression obtenus par les deux méthodes, les courbes restant en tout cas parallèles.

Le schéma du dispositif explorateur des pressions sur les profils est représenté sur la figure 16.

Pour ces essais sur profils, nous avons particulièrement porté notre attention sur le comportement de la pression statique à l'intérieur de la couche limite perpendiculairement à la plaque.

Pour un profil en effet, des perturbations sont à craindre vers le bord de fuite, du fait de la jonction des couches limites d'extrados et d'intrados, et du fait de l'existence d'une circulation.

La perturbation éventuelle doit être d'autant plus importante que la différence de nature et de grandeur entre les deux couches limites est plus accentuée, et que la circulation est plus grande; c'est donc aux plus fortes incidences qu'elle devra se faire sentir.

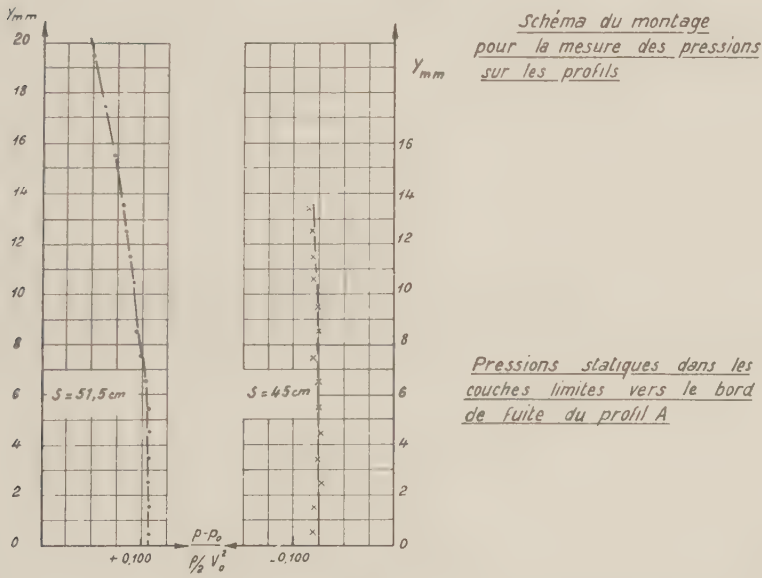
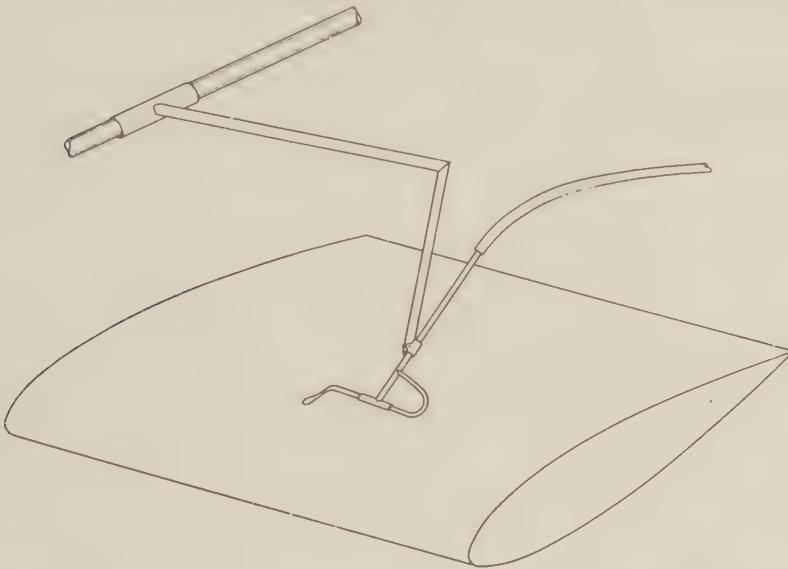


Fig. 16

Dans cet esprit nous avons donc mesuré la pression statique sur le profil A braqué à l'incidence 4° , à une distance curviligne $s = 51,5 \text{ cm}$ du bord d'attaque, c'est-à-dire au voisinage immédiat du bord de fuite : la courbe ainsi obtenue est représentée figure 16.

Il existe bien, dans la couche limite, une évolution de la pression statique perpendiculairement à la plaque; toutefois, au voisinage de la paroi, on note une zone assez étendue où

la pression se maintient constante; notre prise statique se trouvait à l'intérieur de ce palier et a donc enregistré cette valeur pour la pression.

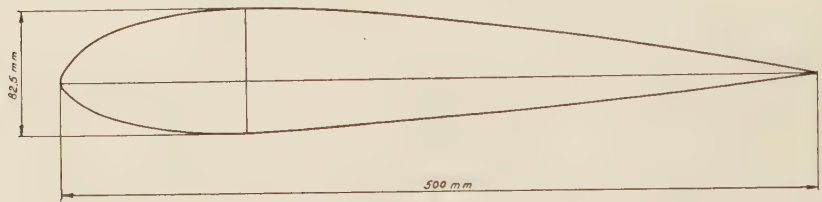
Nous avons cru pouvoir adopter sans correction la pression enregistrée par la prise lècheuse, vu l'évolution tout de même assez faible de la pression statique pour des altitudes supérieures jusqu'en $y = 18$ mm épaisseur de la couche limite.

Pour le même profil à la même incidence, en $s = 45$ cm, l'exploration de la couche limite a montré que la pression se maintenait bien constante à travers la couche limite (voir fig. 16).

3. Essais sur le profil A.

Ce profil, de corde 0,50 m, d'épaisseur maximum 16,5 p. 100, possède un maître couple situé à 25 p. 100 du bord d'attaque.

Le dessin en est donné figure 17.



Profil A

F. g. 17

Nous avons exploré, sur l'extrados, les couches limites turbulentes jusqu'au bord de fuite ainsi que quelques points en laminaire pour une vitesse de référence $V_0 = 32$ m/s aux incidences 0, 2 et 4°.

Les distributions $\frac{p - p_0}{\frac{\rho}{2} V_0^2} = f(s)$ sont représentées planche 15.

Les courbes $\frac{u}{V} = f(y)$ sont représentées :

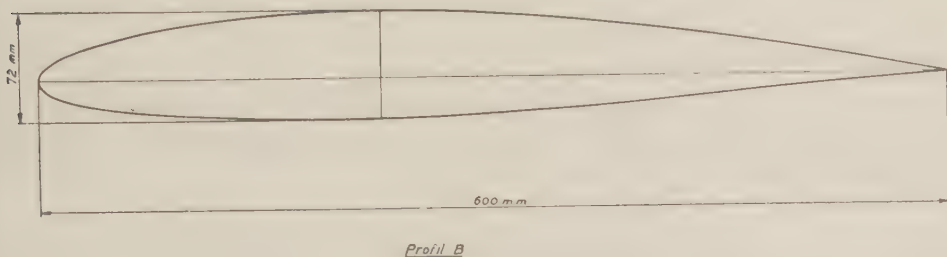
- Planche 16, pour l'incidence 0°;
- Planche 17, pour l'incidence 2°;
- Planche 18, pour l'incidence 4°.

Les valeurs de δ^* , δ^{**} et H sont données :

- Tableau 12, pour l'incidence 0°;
- Tableau 13, pour l'incidence 2°;
- Tableau 14, pour l'incidence 4°.

4. Essais sur le profil B.

Le profil B, de corde $c = 0,60$ m, d'épaisseur maximum $E/c = 0,12$, possède un maître couple situé à 37,5 p. 100 du bord d'attaque. Le dessin en est donné figure 18.



Profil B

Fig. 18

Nous avons également exploré ses couches limites sur l'extrados, à la vitesse de référence $V_0 = 32$ m/s et aux incidences 0° , 2° , 4° et 6° .

Les distributions $\frac{p - p_0}{\frac{\rho}{2} V_0^2} = f(s)$ sont représentées planche 19.

Les courbes $\frac{u}{V} = f(y)$ sont représentées :

Planche 20, pour l'incidence 0° ;

Planche 21, pour l'incidence 2° ;

Planche 22, pour l'incidence 4° ;

Planche 23, pour l'incidence 6° .

Les valeurs de δ^* , δ^{**} et H sont données :

Tableau 15, pour l'incidence 0° ;

Tableau 16, pour l'incidence 2° ;

Tableau 17, pour l'incidence 4° ;

Tableau 18, pour l'incidence 6° .

CHAPITRE III C

DISCUSSION DES RÉSULTATS OBTENUS

1. Essais sur la plaque.

Un premier examen des résultats obtenus par les essais sur les couches limites de la plaque soumises aux différentes distributions de pression doit être fait avant d'utiliser ces résultats pour l'établissement de lois de calcul.

Considérant d'abord l'évolution des épaisseurs pour la distribution 4, et notamment l'évolution de l'épaisseur de quantité de mouvement, nous avons constaté que, à partir de $x = 210$ cm, δ^{**} croissait brutalement et d'une façon tout à fait anormale.

L'exploration des autres parois nous a montré alors qu'il n'y avait nulle part de décollement de la couche limite; celles-ci ne se sont pas non plus rejointes; toutefois, vers l'extrémité aval de la plaque, la zone d'écoulement est apparue comme assez réduite: c'est ainsi que en $x = 275$ cm, nous n'avons noté que 3 cm d'écoulement potentiel entre les parois latérales; il n'est donc pas impossible qu'un phénomène d'interaction des couches limites des parois latérales sur la couche limite au centre de la plaque ait causé cette brusque augmentation de δ^{**} (et de δ^*).

Pour la distribution 5 le phénomène se reproduit; δ^{**} et δ^* croissent encore anormalement après $x = 200$ cm, ce qui nous a donc bien semblé confirmer que les couches limites sur la plaque devenaient impures au bout du canal.

Nous ne pourrions donc utiliser des résultats obtenus sur ces deux séries d'essais que ceux relatifs à des distances du bord d'attaque inférieures à 200 cm.

Par ailleurs, nous avons décidé pour les distributions suivantes de n'étudier les couches limites que sur les deux premiers mètres, ce qui nous laisse encore une longueur appréciable.

2. Essais sur profils. Localisation du point de transition.

En ce qui concerne l'exploitation des résultats obtenus sur les profils, un premier problème se pose immédiatement: pour quelle valeur de s l'écoulement cesse-t-il d'être laminaire pour devenir turbulent?

Plusieurs phénomènes se produisent lors de cette transformation de la couche limite, que nous allons examiner maintenant; ce sont:

— d'abord la modification de la forme des courbes de vitesses et ses corollaires: discontinuité des courbes $u/V = f(x)$ prises en maintenant y constant, variation du paramètre de forme H ;

— ensuite, modification de la loi d'évolution des épaisseurs et spécialement de l'épaisseur de quantité de mouvement.

Lorsqu'on passe de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent, la courbe de distribution des vitesses dans les couches limites change totalement de forme, et la simple observation des courbes permet déjà de situer le point de transition entre certaines limites.

Conséquemment, les courbes $u/V = f(x)$ à y constant évoluent d'une façon différente qu'ailleurs : en laminaire, à mesure qu'on s'éloigne du bord d'attaque, l'épaisseur croît, et les courbes de vitesses dans la couche limite s'étagent en se déplaçant vers la gauche

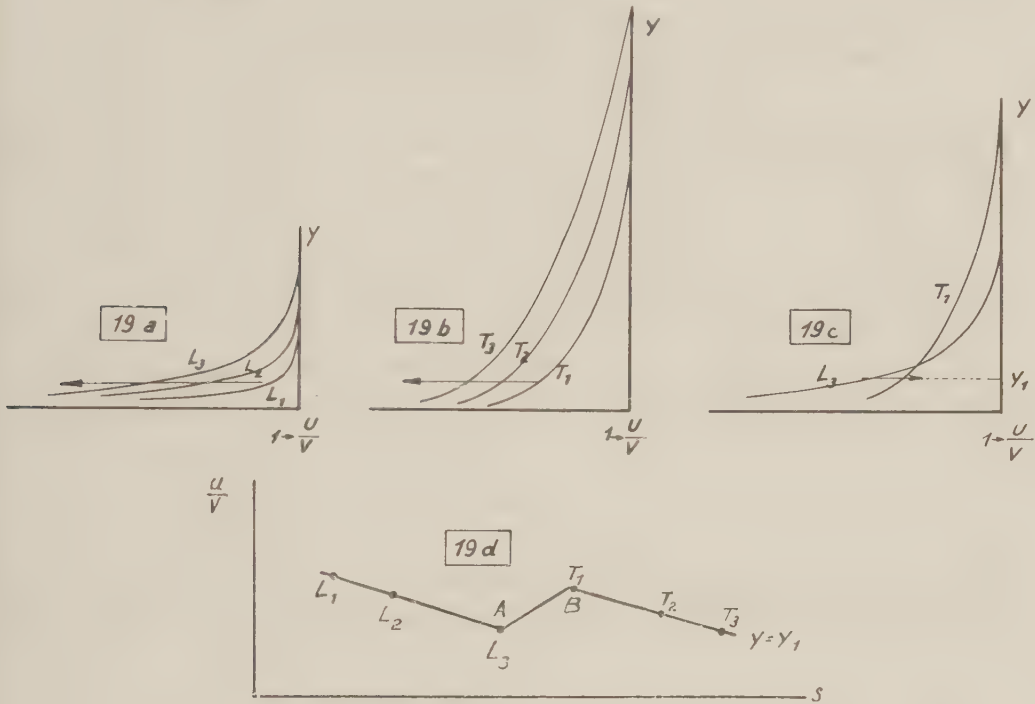


Fig. 19

(fig. 19 a). Il en est de même en turbulent (fig. 19 b) mais le passage de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent s'accompagne d'un croisement des courbes de vitesses (fig. 19 c).

Pour une altitude y_1 la courbe $u/V = f(x)$ présentera donc l'aspect de la figure 19 d.

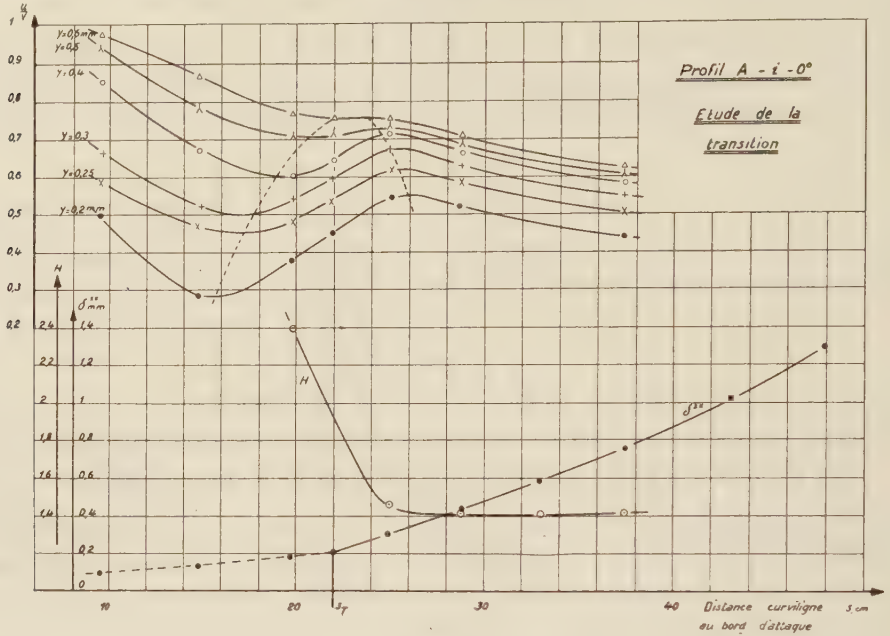
C'est le principe du critère de Melwill JONES (réf. 14) : d'après JONES le point de transition est le point A; nous dirons plutôt qu'il existe une zone de transition AB.

Cette modification de la forme du profil des vitesses s'accompagne encore d'une chute de la valeur du paramètre de forme $H = \delta^*/\delta^{**}$: en laminaire les valeurs de H sont grandes (2,6 pour la plaque plane); en couche limite turbulente H est plus faible (1,3 pour la plaque plane, 1,8-1,9 au maximum au bord de fuite d'un profil).

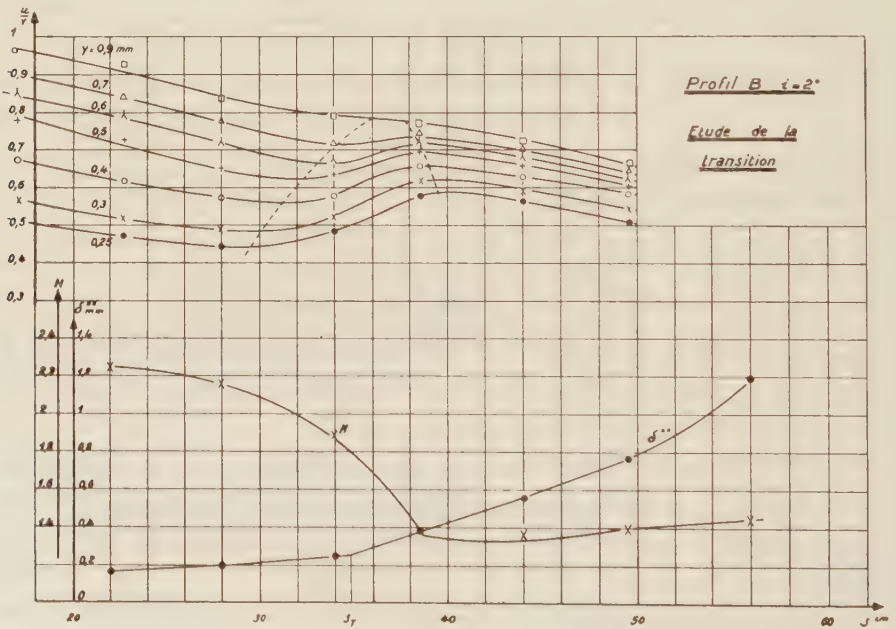
Enfin, les lois d'évolution de l'épaisseur de quantité de mouvement sont évidemment différentes selon qu'il s'agit de couches laminaire ou turbulente : en turbulent δ^{**} croît plus vite qu'en laminaire, et l'on pourra observer une cassure de la courbe $\delta^{**} = f(x)$ au point de transition.

Dans la pratique, ces phénomènes sont plus ou moins nets, et il est assez malaisé de situer avec précision le point de transition.

Aussi nous a-t-il semblé que seule la comparaison des phénomènes ci-dessus nous permettrait de réduire suffisamment les limites d'indétermination du point de transition.



Nous avons fait cet examen comparatif pour le profil A à l'incidence 0° et pour le profil B à 2° , et nous avons porté figures 20 et 21 les courbes $u/V = f(x)$ à différentes altitudes, ainsi que les courbes $\delta^{**} = f(x)$ et $H = f(x)$.



Ce qui frappe immédiatement dans l'examen des courbes $u/V = f(x)$, c'est que les points A et B du critère de JONES, s'ils semblent assez mal définis, paraissent tout de même nettement évoluer avec l'altitude.

Si l'on prend comme point de transition le point A, l'erreur peut être importante selon l'altitude choisie et il sera manifestement impossible de faire coïncider ce point avec la cassure de la courbe $\delta^{**} = f(x)$.

On note bien dans la région de la transition la décroissance du paramètre de forme II, mais ceci ne peut nous permettre de déterminer la position du point de transition avec une précision plus grande que le simple examen des courbes de vitesses.

En ce qui concerne l'épaisseur de quantité de mouvement, il est visible que sa croissance est plus rapide en turbulent qu'en laminaire; toutefois, la cassure annoncée dans la courbe $\delta^{**} = f(x)$ n'est pas très nette.

L'examen simultané de ces courbes permet tout de même de réduire les limites d'indétermination de la position du point de transition : le milieu du segment AB de la courbe de JONES semble peu varier avec l'altitude, et il est très possible de le faire coïncider avec la cassure de la courbe $\delta^{**} = f(x)$.

Ainsi, pour le profil A à 0° le point de transition peut-il être situé à $s = 22$ cm du bord d'attaque.

Pour le profil B le point de transition se trouve alors situé à $s = 35$ cm du bord d'attaque (pour $i = 8^\circ$).

Des considérations semblables nous ont conduit à adopter comme positions des points de transition pour les autres essais les valeurs suivantes :

Profil A : $i = 2^\circ$	$s = 18$ cm;
$i = 4^\circ$	$s = 16$ cm.
Profil B : $i = 0^\circ$	$s = 40$ cm;
$i = 4^\circ$	$s = 20$ cm;
$i = 6^\circ$	$s = 8$ cm.

CHAPITRE IV

EXPLOITATION DE NOS RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX POUR LE CALCUL DE L'ÉPAISSEUR DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT

Disposant des résultats expérimentaux précédents, il nous reste à définir les paramètres intéressants relatifs à l'écoulement dans les couches limites et les relations les liant, ce qui, en fin de compte, doit nous permettre d'établir une méthode de calcul.

Nous avons dit que notre but était d'essayer de lier entre eux les paramètres proposés par les auteurs ayant traité des couches limites turbulentes.

Pour ce faire, nous nous servirons des résultats que nous avons obtenus sur la plaque avec gradients et sur les profils A et B.

CHAPITRE IV A

PREMIÈRE MÉTHODE DE CALCUL
DE L'ÉPAISSEUR DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT

Pour établir cette première méthode, nous admettrons, comme BURR, que le coefficient de frottement local est donné par :

$$\frac{\bar{c}_0}{\rho V^2} = C \left(\frac{V \delta^{**}}{\nu} \right)^{-1/4} = C \xi \left(\frac{V \delta^{**}}{\nu} \right)^{-1/4}$$

où $\xi = \left(\frac{\delta^{**}}{\delta} \right)^{1/4}$ est fonction de la forme du profil des vitesses.

L'équation des quantités de mouvement peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{c}_0}{\rho V^2} &= C \xi \left(\frac{V \delta^{**}}{\nu} \right)^{-1/4} = \frac{d\delta^{**}}{dx} + (H+2) \frac{\delta^{**}}{\nu} \frac{dV}{dx} \\ C \xi \left(\frac{V}{\nu} \right)^{-1/4} &= \frac{d\delta^{**}}{dx} \delta^{**1/4} + \delta^{**5/4} (H+2) \frac{dV}{V} \\ (1) \quad \frac{5}{4} C \xi \left(\frac{V}{\nu} \right)^{-1/4} &= \frac{d(\delta^{**})^{5/4}}{dx} + \delta^{**5/4} \frac{5}{4} (H+2) \frac{dV}{V} \end{aligned}$$

équation différentielle linéaire du premier ordre en $\delta^{**5/4}$ que l'on pourrait intégrer si l'on connaissait l'évolution de H suivant x et la relation entre H et ξ .

Nous avons vu dans la discussion de la méthode GRUSCHWITZ (fig. 12, p. 50) que les relations entre H et $\eta = 1 - (u_1/V)^2$ [paramètre de forme de GRUSCHWITZ], dans le cas d'une représentation du profil des vitesses par une loi logarithmique ou par une loi en puissance, s'éloignaient assez peu de la relation trouvée expérimentalement par GRUSCHWITZ.

Il est permis d'espérer qu'il en sera de même pour la relation entre H et ξ .

Nous avons donc calculé ξ pour la loi : $\frac{u}{V} = 1 + K_1 \log_e \frac{y}{\delta}$ ce qui nous donne :

$$\frac{\delta^{**}}{\delta} = K_1 (1 - 2 K_1) = \frac{H-1}{2H^2} \xi = \left(\frac{H-1}{2H^2} \right)^{1/4}$$

Dans le cas de la représentation $\frac{u}{V} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/m}$ on obtient :

$$\frac{\delta^{**}}{\delta} = \frac{m}{(m+1)(m+2)} \quad H = \frac{m+2}{m} \quad \xi = \left(\frac{H-1}{H(H+1)} \right)^{1/4}$$

Les courbes ainsi obtenues sont représentées sur la figure 22 sur laquelle nous avons également porté les points expérimentaux $\xi = f(H)$ tirées de nos expériences.

De ces points il est assez difficile de tirer une courbe précise ; toutefois, jusqu'à $H = 1,6$, les points se situent bien dans la région indiquée par les lois logarithmique et en puissance et l'erreur possible sur ξ reste réduite ; pour H supérieur à 1,6 la différence entre la courbe que l'on pourrait tirer de nos résultats expérimentaux et celle donnée par la loi en puissance est relativement faible.

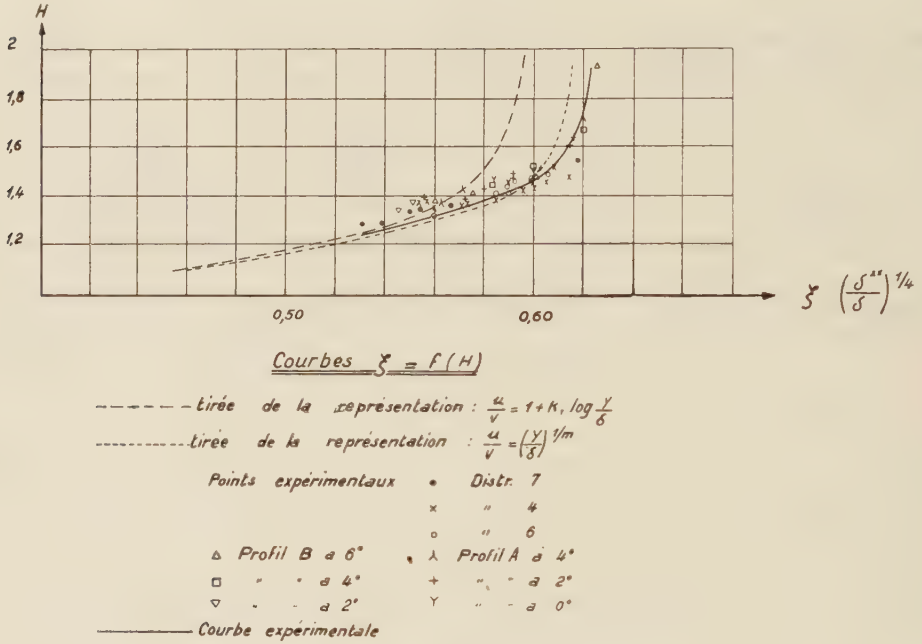


Fig. 22

Revenons à l'équation 1 : c'est une équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\frac{dY}{dx} + P_{(x)} Y = Q_{(x)}$$

avec :

$$\begin{cases} Y = \delta^{**5/4} ; \\ P_{(x)} = \frac{5}{4} (H + 2) \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} \\ Q_{(x)} = \frac{5}{4} C \xi \left(\frac{v}{\delta}\right)^{1/4} \text{ ou puisque } C = 0,0225 \\ Q_{(x)} = 0,0280 \xi \left(\frac{v}{\delta}\right)^{-1/4} \end{cases}$$

dont la solution est :

$$Y = e^{-\int P dx} \left[C + \int Q e^{\int P dx} dx \right].$$

L'intégrale sera prise entre une certaine origine x_1 où la valeur Y_1 de $\delta^{**5/4}$ sera connue, et le point de calcul x :

$$Y = e^{-\int_{x_1}^x P dx} \left[Y_1 + \int_{x_1}^x Q e^{\int_{x_1}^x P dx} dx \right].$$

En principe il sera nécessaire de connaître la loi d'évolution de H suivant x pour déterminer Y .

En pratique, H évoluant assez peu avec x en couche limite turbulente, nous pourrions essayer d'obtenir une solution approchée en considérant H comme constant.

La solution prend alors une forme simple : nous avons en effet :

$$P(x) = \frac{5}{4} (H + 2) \frac{d}{dx} (\text{Log}_e V)$$

$$\int_{x_1}^x P dx = \frac{5}{4} (H + 2) \log \frac{V}{V_1}$$

V_1 étant la valeur de la vitesse potentielle en $x = x_1$:

$$e^{\int_{x_1}^x P dx} = e^{\frac{5}{4} (H + 2) \log \frac{V}{V_1}} = \left(\frac{V}{V_1} \right)^{5/4 (H + 2)}$$

La solution s'écrit alors :

$$\delta^{**5/4} = \left(\frac{V_1}{V} \right)^{5/4 (H + 2)} \left[\delta_1^{**5/4} + \int_{x_1}^x 0,0280 \xi \frac{v^{1/4}}{V^{1/4}} \frac{V_1^{5/4} (H + 2)}{V_1^{5/4} (H + 2)} dx \right]$$

$$= \left(\frac{V_1}{V} \right)^{5/4 (H + 2)} \left[\delta_1^{**5/4} + 0,0280 \xi \left(\frac{v}{V_1} \right)^{1/4} \int_{x_1}^x \left(\frac{V}{V_1} \right)^{\frac{5H+9}{4}} dx \right].$$

$$(2) \quad \delta^{**} = \left(\frac{V_1}{V} \right)^{H+2} \left[\delta_1^{**5/4} + 0,0280 \xi \left(\frac{V}{V_1} \right)^{1/4} \int_{x_1}^x \left(\frac{V}{V_1} \right)^{\frac{5H+9}{4}} dx \right]^{4/5}.$$

Le calcul de l'épaisseur de quantité de mouvement par cette équation se fait rapidement.

Cette méthode ne peut toutefois être considérée que comme une méthode approchée du fait que l'on néglige l'évolution du paramètre de forme H , et qu'un choix doit être fait pour ce dernier.

Ce choix étant fait, la valeur correspondante de ξ sera obtenue par l'une des courbes de la figure 22 ; en toute logique on devrait utiliser la courbe expérimentale, mais de toute façon l'erreur sur ξ restera faible, car on doit s'attendre à devoir limiter le choix de H entre les valeurs 1,3 et 1,6.

Si l'on choisit comme SQUIRE et YOUNG la valeur 1,4 pour H, la figure 21 montre que l'on peut adopter pour ξ la valeur 0,58 et la solution prend alors la forme ci-dessous particulièrement simple à calculer :

$$(3) \quad \delta^{**} = \left(\frac{V_1}{v}\right)^{3,4} \left[\delta_1^{**5/4} + 0,0163 \left(\frac{v}{V_1}\right)^{1/4} \int_{x_1}^x \left(\frac{v}{V_1}\right)^4 dx \right]^{4/5}.$$

Pour un profil d'aile, l'origine x_1 sera prise au point de transition, δ^{**} ayant été calculé jusque-là pour la couche limite laminaire.

Nous avons recalculé par la formule (3), c'est-à-dire en choisissant $H = 1,4$, l'épaisseur de quantité de mouvement pour les distributions 4-5-6-7-8 sur la plaque et pour les profils A et B.

Pour la plaque, le calcul a été mené à partir de la distance $x = 10$ cm du début de la plaque la valeur de δ^{**} prise comme origine étant celle donnée par l'expérience en ce point.

Pour les profils, le calcul a été mené à partir du point de transition en prenant comme valeur originale pour δ^{**} la valeur trouvée expérimentalement en ce point.

Les courbes $\delta^{**} = f(x)$ résultant de ces calculs et la comparaison avec l'expérience sont données sur les figures 23, 24 et 25. (Voir p. 79 et 80).

On peut voir que cette première méthode rapide fournit déjà une approximation honnête de l'épaisseur de quantité de mouvement.

La valeur 1,4 choisie pour H semble donner satisfaction sauf peut-être pour le profil B où elle serait trop faible vers le bord de fuite.

A titre d'exemple nous donnons le détail du calcul pour la distribution 6 sur la plaque

$x_1 = 10 \text{ cm} \quad \left(\frac{V_1}{v}\right)^{1/4} = 37,6 \text{ unités MKS} \quad 0,0163 \left(\frac{v}{V_1}\right)^{1/4} = 0,000434$ $V_1 = 28,7 \text{ m/s}$ $\delta_1^{**} = 0,00037 \text{ m} \quad \delta_1^{**5/4} = 0,0000513$							
$\delta^{**} = \left(\frac{V_1}{v}\right)^{3,4} \left[0,0000513 + 0,000434 \int \left(\frac{v}{V_1}\right)^4 dx \right]$							
x_m	$\frac{v}{V_1}$	$\left(\frac{v}{V_1}\right)^4$	$\left(\frac{V_1}{v}\right)^{3,4}$	$\int_{x_1}^x \left(\frac{v}{V_1}\right)^4 dx$	$[0,0000513 + \dots]$	$[\dots]^{4/5}$	δ_m^{**}
0,10	1	1	1	0	0,0000513	0,00037	0,00037
0,20	0,990	0,962	1,05	0,098	0,0000938	0,000595	0,000625
0,40	0,953	0,827	1,18	0,276	0,0001713	0,00097	0,001145
0,80	0,887	0,620	1,21	0,564	0,0002963	0,00151	0,00228
1,20	0,834	0,490	1,85	0,788	0,0003933	0,00188	0,00348
1,60	0,775	0,363	2,36	0,960	0,0004673	0,00217	0,00513
2,00	0,695	0,232	3,42	1,082	0,0005213	0,00236	0,00806

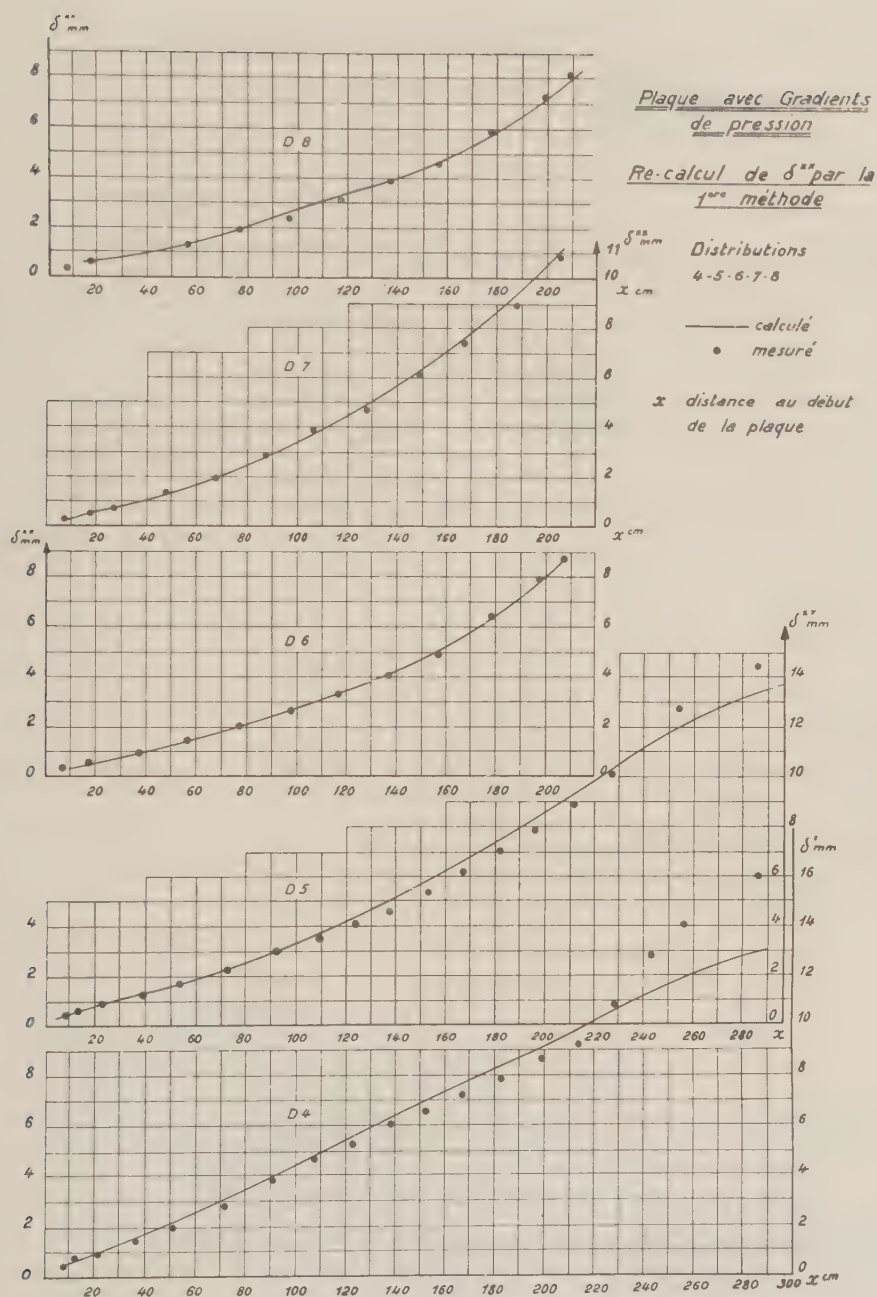


Fig. 93

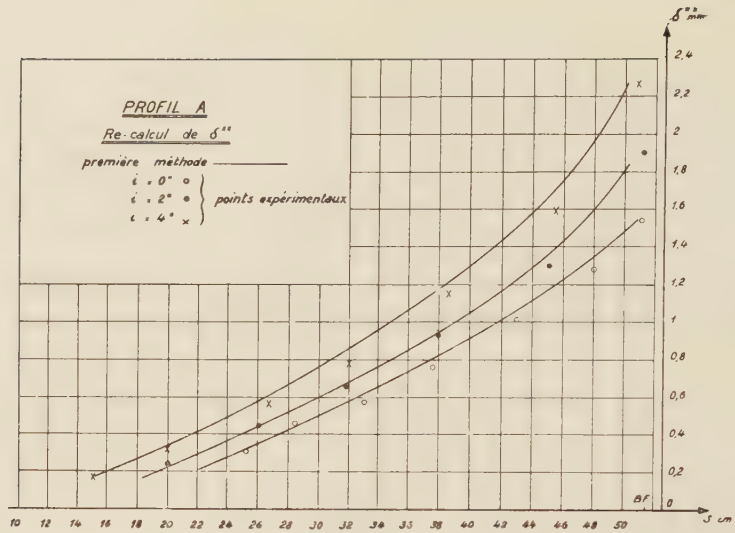


Fig. 24

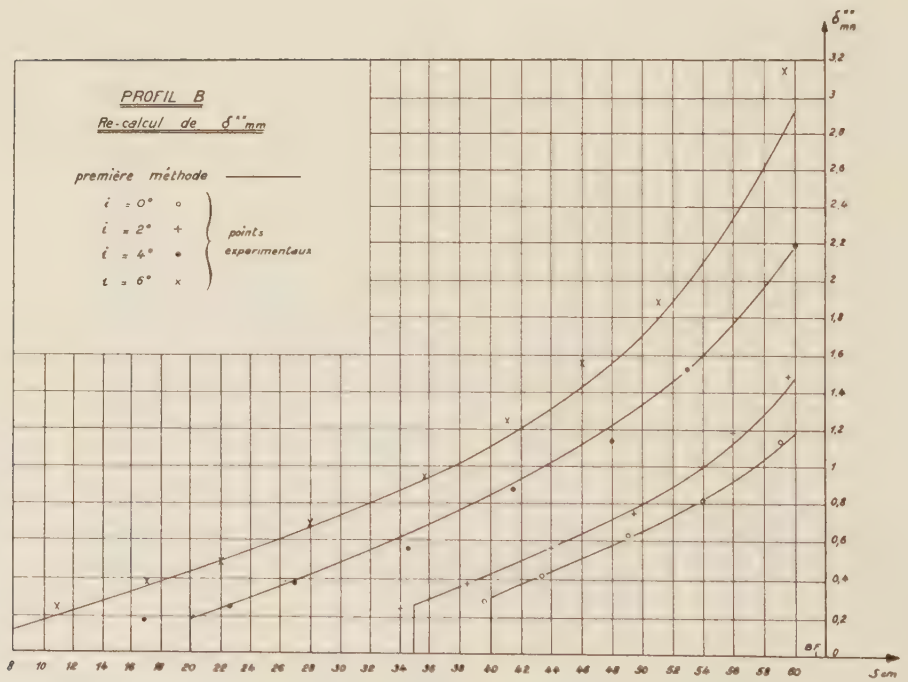


Fig. 25

DEUXIÈME MÉTHODE DE CALCUL DE L'ÉPAISSEUR DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT

1. Paramètres influençant l'évolution des couches limites turbulentes.

En nous basant sur nos résultats expérimentaux, nous allons maintenant établir une deuxième méthode de calcul des couches limites (en ce qui concerne δ^{**}), par des considérations sur les paramètres de forme.

Jusqu'ici, un paramètre de forme est pour nous un nombre lié essentiellement au profil des vitesses : nous allons voir qu'un paramètre de forme (physique) peut aussi régir l'évolution de la couche limite et, tout d'abord, de l'épaisseur de quantité de mouvement.

Nous avons vu que le comportement des couches limites sans gradient de pression dépendait uniquement du nombre de REYNOLDS R_x formé avec la vitesse potentielle et le chemin parcouru.

Une couche limite à distribution de vitesse et pression potentielles variables dépendra de plus de la distribution des vitesses en question.

Il est immédiat d'essayer de faire intervenir le gradient de vitesse $\frac{dV}{dx}$ et le nombre sans dimension à former avec x , V et $\frac{dV}{dx}$ est alors $\frac{x dV}{V dx}$ paramètre adopté par LEES.

D'après LEES, $\frac{x dV}{V dx}$ est le paramètre gouvernant tout l'écoulement dans les couches limites ; il régit :

— d'une part, la forme du profil des vitesses et la valeur du paramètre de forme géométrique H ;

— d'autre part, la croissance de la couche limite, puisque LEES prétend le relier directement à l'épaisseur δ^{**} et au coefficient de frottement.

LEES entre là en contradiction avec les autres auteurs pour lesquels le problème des couches limites turbulentes doit se traiter d'une façon progressive.

Il semble logique en effet d'admettre que, notamment, l'épaisseur de quantité de mouvement en un point considéré, dépend de son évolution antérieure, ce qui rend impossible l'hypothèse de l'existence d'une relation directe entre δ^{**} et le paramètre strictement local $\frac{x dV}{V dx}$.

Toutefois, si le paramètre de forme de LEES ne peut être relié directement à δ^{**} , il n'est pas impossible qu'il le soit à la croissance de δ^{**} au point considéré, et qu'il existe une relation entre une dérivée de δ^{**} et $\frac{x dV}{V dx}$.

Examinons maintenant la méthode BURI, ou plus simplement son point de départ :

$$\frac{\mathfrak{C}_o}{\rho V^2} = C\xi \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{-1/4} = \frac{d\delta^{**}}{dx} + (H+2) \frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx}$$

qui donne encore :

$$C\xi = \frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4} + (H+2) \frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}.$$

$\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$ est le paramètre Γ_1 de BURI, et ξ et H ne sont fonctions que de Γ_1 .

$C\xi$, $\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$ et H sont trois nombres qui resteront constants ensemble.

Il en sera par conséquent de même de $\frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$ qui sera également paramètre de forme.

La méthode BURI fournit donc deux paramètres de forme :

$$\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4} \text{ et } \frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}.$$

Si l'on admet alors également que $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ est paramètre de forme, ces trois nombres devront être reliés les uns aux autres par des relations bien établies, et il existera notamment une courbe $\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4} = f_1 \left(\frac{x}{V} \frac{dV}{dx} \right)$ et une courbe $\frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4} = f_2 \left(\frac{x}{V} \frac{dV}{dx} \right)$.

Le mode d'exploitation de nos résultats apparaît ainsi tout tracé :

1° Vérifier s'il existe une relation entre :

$$\frac{x}{V} \frac{dV}{dx} \text{ et } \frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$$

2° Vérifier s'il existe une relation entre :

$$\frac{x}{V} \frac{dV}{dx} \text{ et } \frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}.$$

2. Relation entre $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ et $\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$.

Une première difficulté se présente immédiatement qui est la détermination de l'origine de la couche turbulente nécessaire à la connaissance de $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$.

Cette origine, connue pour nos essais sur la plaque puisque provoquée, ne l'est plus pour les profils, où les couches limites turbulentes sont précédées de couches laminares.

Nous verrons cette question au paragraphe suivant mais nous pouvons déjà essayer de vérifier pour la plaque s'il existe une relation entre les paramètres énoncés.

Nous avons donc calculé pour les différentes distributions de pression sur la plaque les valeurs de $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ et de $\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V \delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$.

Ces valeurs sont données dans les tableaux 19, 20, 21, 22, 23, et portées l'une en fonction de l'autre sur la figure 26.

Le résultat obtenu est à première vue incertain : si au départ, pour les faibles valeurs des deux paramètres, les points se groupent bien sur une même courbe, le résultat devient beaucoup plus mauvais à mesure que $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ croît, c'est-à-dire à mesure que se développe le chemin parcouru par la couche limite.

Ceci était assez prévisible :

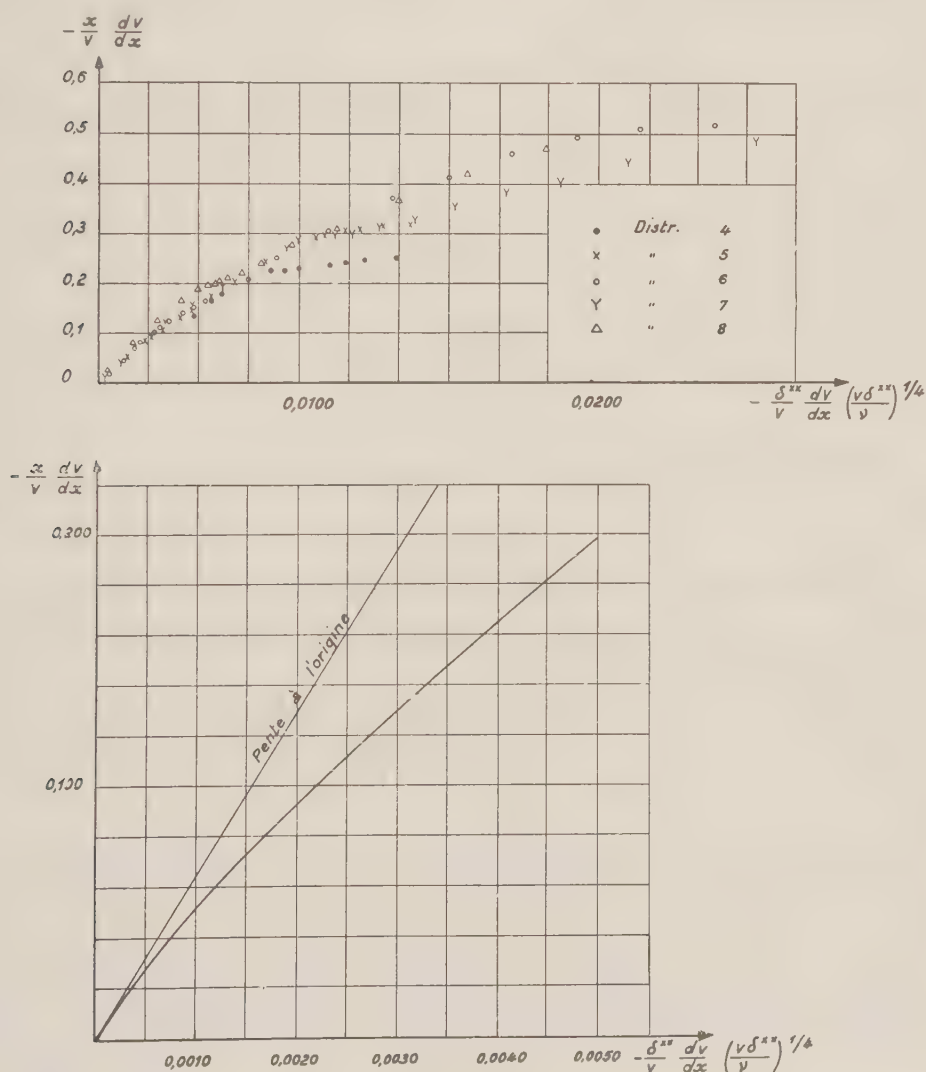


Fig. 26

une relation rigoureuse entre $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ et $\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V \delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$ signifierait que l'épaisseur δ^{**} est directement reliée au paramètre local $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ ce que nous avons jugé impossible.

Le fait qu'une relation existe pour les faibles valeurs des deux paramètres peut être expliqué de la façon suivante :

Pour des faibles valeurs de $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ et notamment pour des faibles chemins parcourus, à partir de l'origine de la couche limite turbulente, l'évolution de l'épaisseur de quantité de mouvement est réduite; l'épaisseur en un point, qui en toute logique doit dépendre de son évolution antérieure, ne subit de la part de cette évolution qu'une faible influence et peut alors être reliée au paramètre local $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$.

Il est intéressant de constater que la pente à l'origine de la courbe obtenue est d'avance parfaitement définie.

C'est la limite du rapport $\frac{\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V \delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}}{\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}}$ quand $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ tend vers 0, ou encore quand $\frac{dV}{dx}$ tend vers 0.

La pente est donc la limite ou plutôt la valeur de $\frac{\delta^{**}}{x} \left(\frac{V \delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$ pour le gradient nul, ou puisque l'on a alors :

$$\frac{\zeta_o}{\rho V^3} = \frac{0,01255}{\left(\frac{V \delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}} = 0,8 \frac{\delta^{**}}{x}$$

$$\frac{\delta^{**}}{x} \left(\frac{V \delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4} = 0,0156.$$

2 bis. Détermination de l'origine fictive de la couche limite turbulente.

Il va nous être maintenant possible de déterminer l'origine fictive de la couche limite turbulente précédée d'une couche laminaire.

Nous supposerons connus : la répartition des vitesses potentielles tout le long de la surface, la position x_T du point de transition (par exemple par rapport au bord d'attaque), et la valeur de δ^{**} au point de transition.

Les valeurs de $\frac{1}{V} \frac{dV}{dx}$ sont alors également connues, et la valeur de $\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V \delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$ au point de transition est également une donnée du problème.

Au point de transition, le chemin (fictif) parcouru par la couche limite turbulente depuis son origine est obligatoirement réduit, et la valeur correspondante de $\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V \delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$ doit nous donner sur la courbe de la figure 25 un point situé dans la partie bien définie.

Il est donc possible d'obtenir au moyen de cette courbe la valeur de $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ au point de transition; $\frac{1}{V} \frac{dV}{dx}$ étant connu, il suffira de diviser par sa valeur au point de transition le $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ trouvé, pour obtenir x distance du point de transition à l'origine fictive de la couche limite turbulente x_0 .

Nous avons procédé de cette façon pour déterminer les origines des couches limites turbulentes pour les profils A et B, et nous allons pouvoir maintenant essayer de vérifier la deuxième relation aussi bien pour les profils que pour la plaque.

3. Relation entre $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ et $\frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$.

Nous avons donc calculé pour la plaque et pour les profils les valeurs des $\frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$ ou $\frac{d\delta^{**}}{ds} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$ qui sont donnés dans les tableaux 19 à 29 et que nous avons portés figure 27 en fonction de $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ ou $\frac{s}{V} \frac{dV}{ds}$.

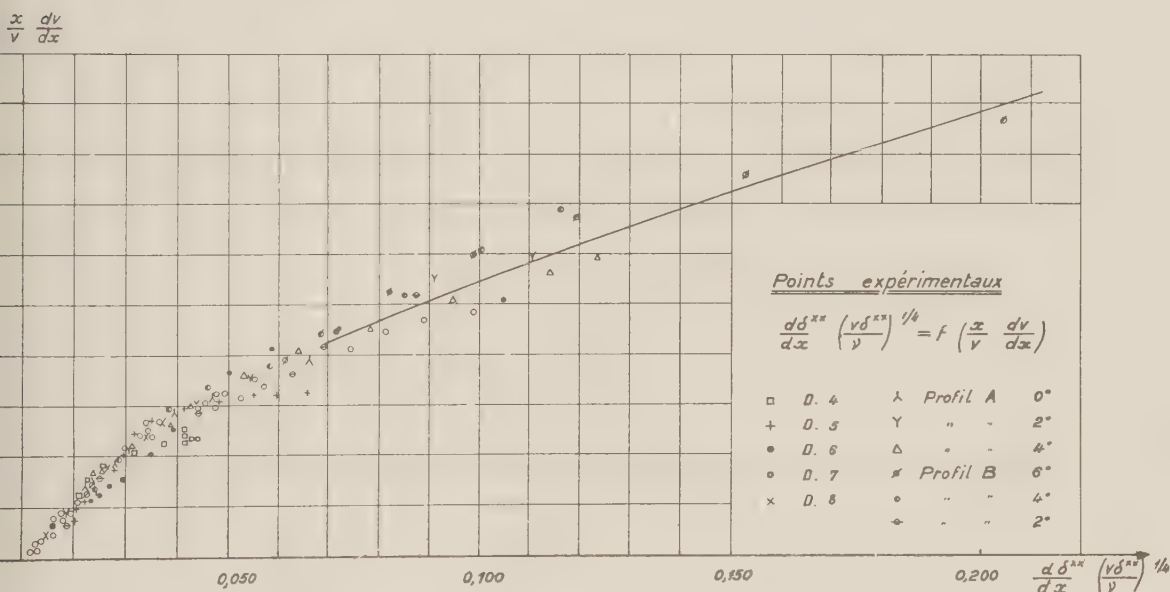
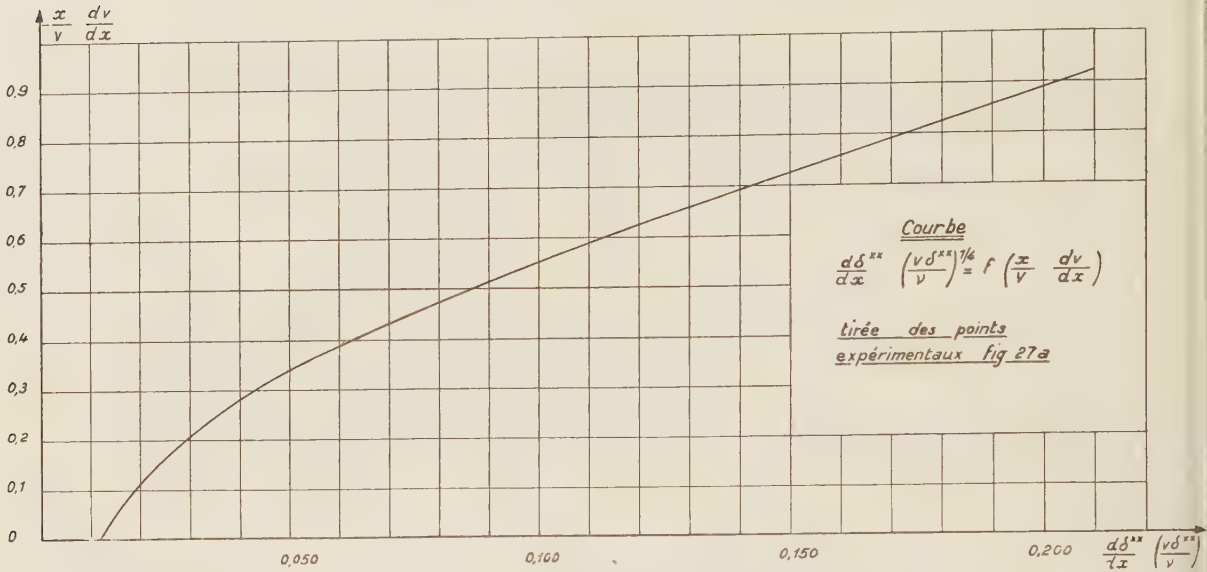


Fig. 27 A

L'examen de cette figure montre que tous les points ainsi obtenus viennent assez bien se grouper autour d'une courbe unique.

Il existe évidemment une certaine dispersion, mais il faut tenir compte du fait que les quantités portées comprennent des dérivées de courbes tracées au milieu de points expérimentaux, et qu'une indétermination plus ou moins grande est inévitable (spécialement en ce qui concerne $\frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$).

Il est donc permis d'espérer que cette courbe tolère une certaine dispersion des points qui la composent; la seule réponse à cette question sera le recalcul de l'épaisseur de quantité de mouvement par la méthode qui résulte de l'existence de cette courbe.



Notons immédiatement que la valeur de $\frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$ pour $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx} = 0$ est donnée par les lois des couches limites turbulentes sans gradient, c'est-à-dire :

$$\frac{\bar{c}_0}{\rho V_0^2} = \frac{0,01255}{\left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}} = \frac{d\delta^{**}}{dx}$$

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4} = 0,01255 \text{ pour } \frac{x}{V} \frac{dV}{dx} = 0.$$

4. Méthode résultante de calcul de l'épaisseur de quantité de mouvement.

La méthode de calcul qui résulte des courbes

$$\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4} = f_1 \left(\frac{x}{V} \frac{dV}{dx} \right) \text{ et } \frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4} = f_2 \left(\frac{x}{V} \frac{dV}{dx} \right)$$

est alors la suivante :

1° La connaissance de la distribution des vitesses potentielles et de δ^{**} au point de transition permet d'obtenir $\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$ donc, d'après la première courbe, $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ au point de transition et l'origine de la couche limite turbulente est ainsi déterminée;

2° Il est alors possible de calculer $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ tout le long de la surface de contact et la deuxième courbe donne $\frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4} = \frac{4}{5} \left(\frac{V}{\nu} \right)^{1/4} \frac{d(\delta^{**5/4})}{dx}$.

On obtient ainsi $\frac{d(\delta^{**5/4})}{dx}$ tout le long de la surface et, intégrant à partir de la valeur de $\delta^{**5/4}$ au point de transition, les valeurs de $\delta^{**5/4}$ donc de δ^{**} .

Nous avons ainsi recalculé les épaisseurs de quantité de mouvement pour nos différents essais sur la plaque et sur les profils.

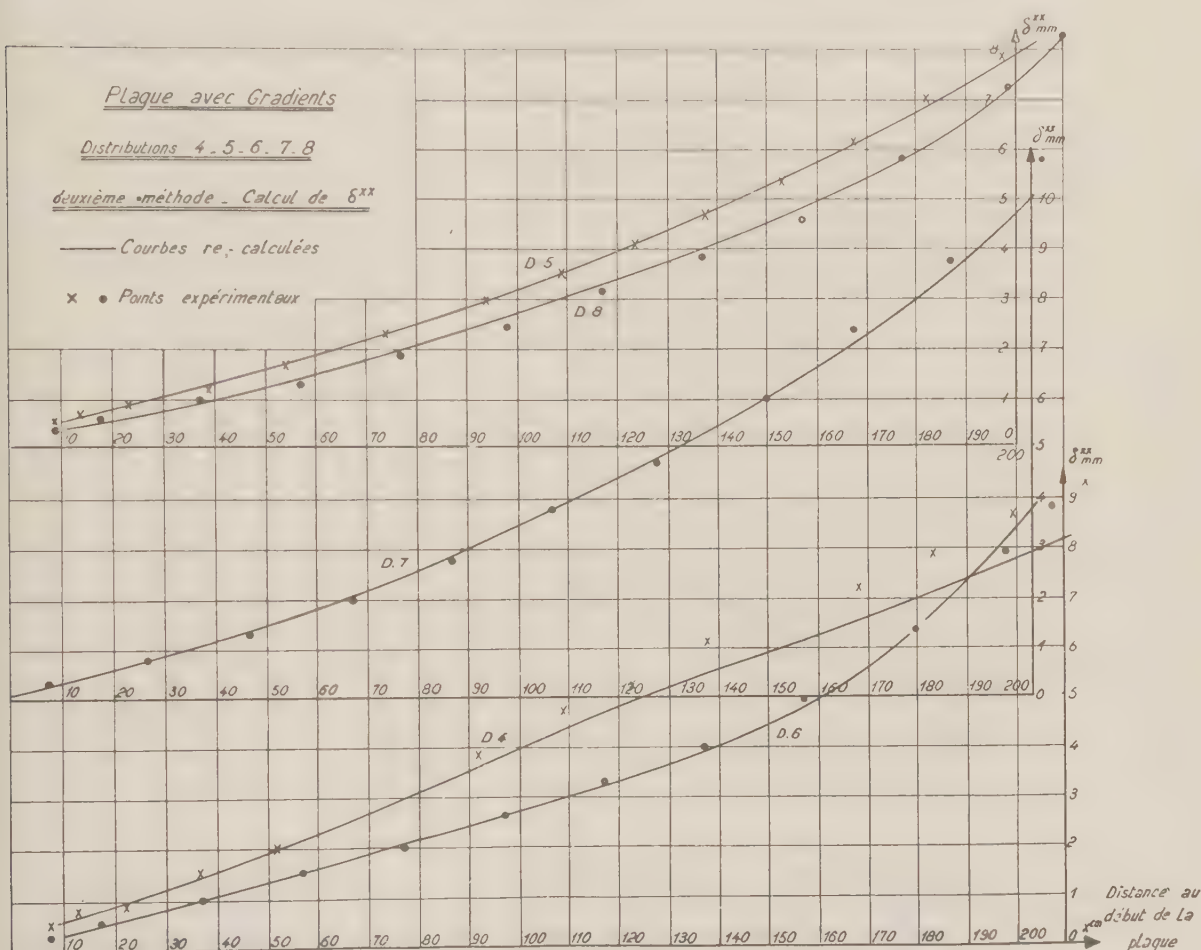


Fig. 28

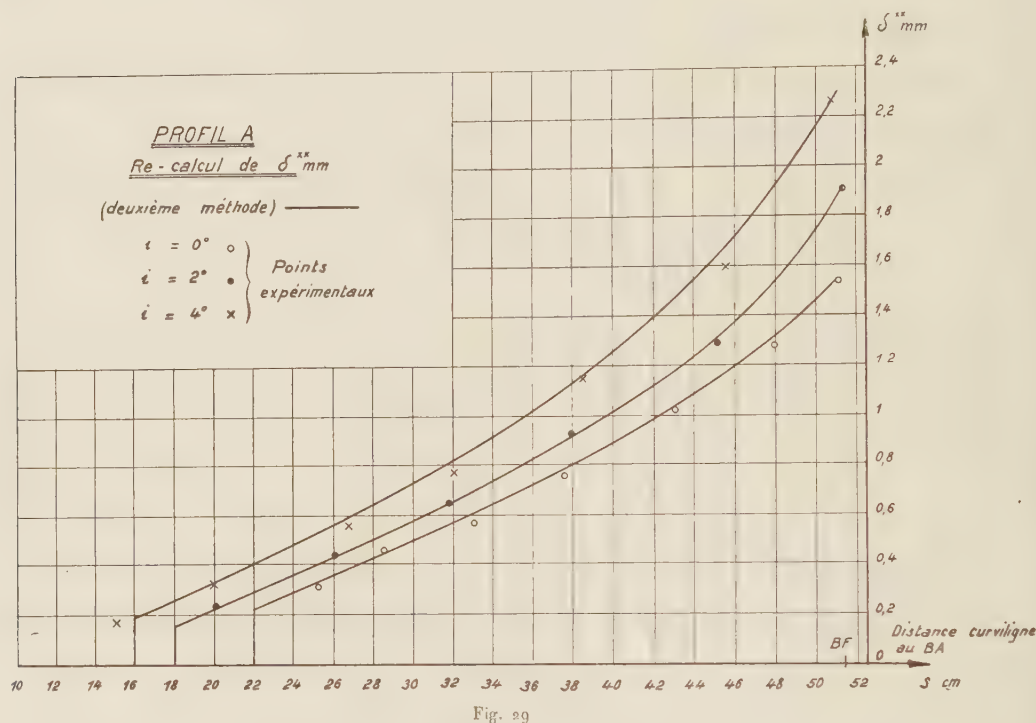
Pour la plaque, nous avons recalculé les distributions 4, 5, 6, 7, 8, à partir d'une origine choisie en $x = 10$ cm du début de la plaque en prenant comme valeur originale pour δ^{**} celle donnée par l'expérience.

Pour les profils A et B, nous avons déterminé l'origine fictive comme il a été décrit et calculé l'épaisseur de quantité de mouvement à partir de la valeur expérimentale trouvée au point de transition.

La comparaison entre calcul et expérience est donnée sur les figures 28, 29, 30 et montre dans l'ensemble un accord tout à fait satisfaisant.

Nous devons toutefois mentionner que les distributions 1, 2 et 3 font exception, et que les valeurs de $\frac{x}{\bar{v}} \frac{dV}{dx}$ et de $\frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\bar{v}} \right)^{1/4}$ pour ces essais ne se placent pas sur la courbe de la figure 27 B.

Ces distributions concernent des couches turbulentes à vitesses potentielles constantes sur 1 m, décroissantes ensuite.



Lorsque, à partir du premier mètre $\left| \frac{dV}{dx} \right|$ commence à croître, $\frac{x}{\bar{v}} \frac{dV}{dx}$ atteint aussitôt de grandes valeurs du fait que x est déjà supérieur à 100 cm, et δ^{**} ne suit pas cette brusque augmentation.

Le calcul de δ^{**} pour ces trois distributions par la première méthode ne nous avait d'ailleurs pas donné davantage satisfaction.

Nous avons encore appliqué notre méthode aux essais de GRUSCHWITZ, et calculé δ^{**} pour les parties à gradients positifs des distributions 2 et 4 sur sa plaque, ainsi que le profil d'aile à l'incidence 12° (voir fig. 31).

Nous avons enfin appliqué notre méthode aux essais de STÜPER (réf. 15) et recalculé l'épaisseur de quantité de mouvement pour son profil aux Cz 0,91 0,55 0,40 (voir fig. 32).

Ces figures 31 et 32 montrent également un accord acceptable entre calcul et expérience.

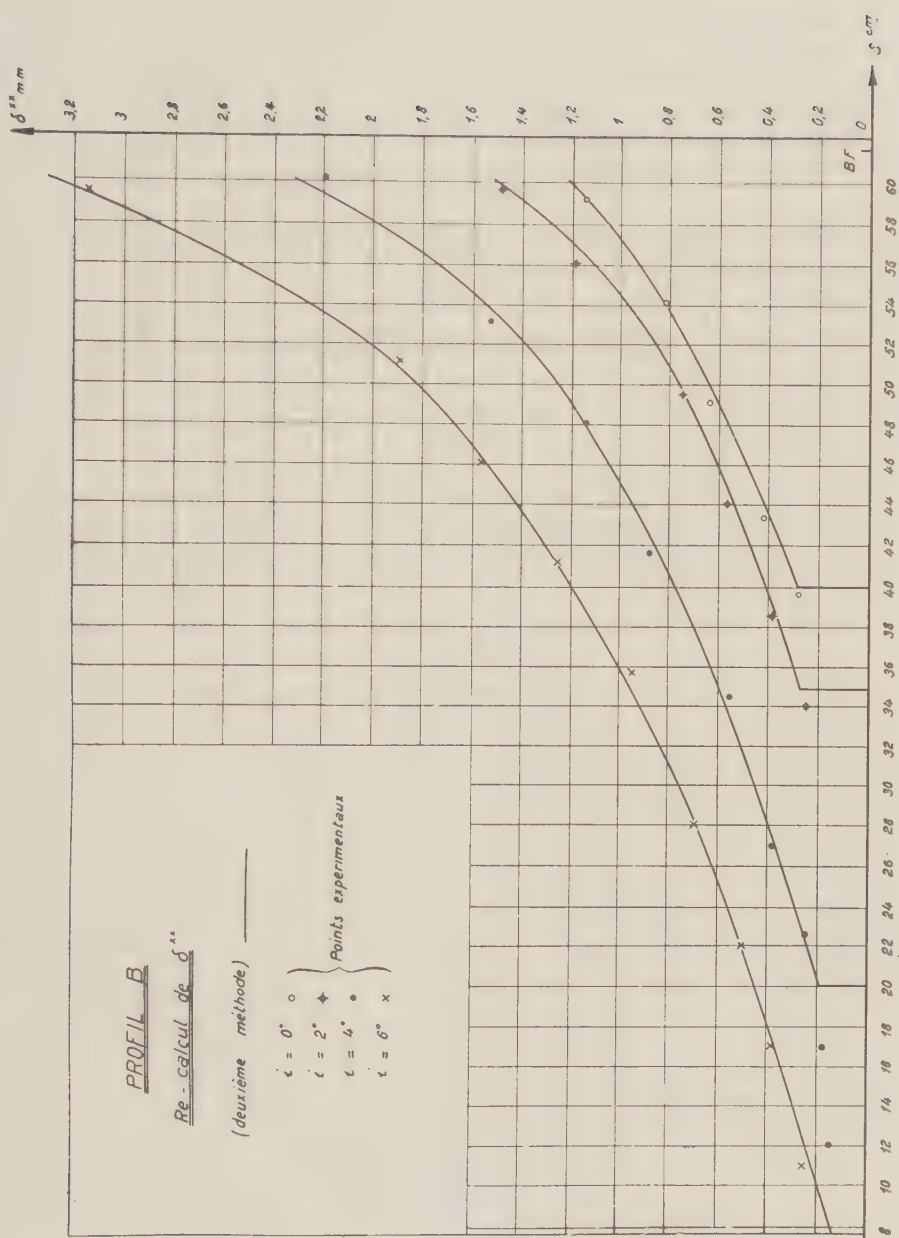


Fig. 30

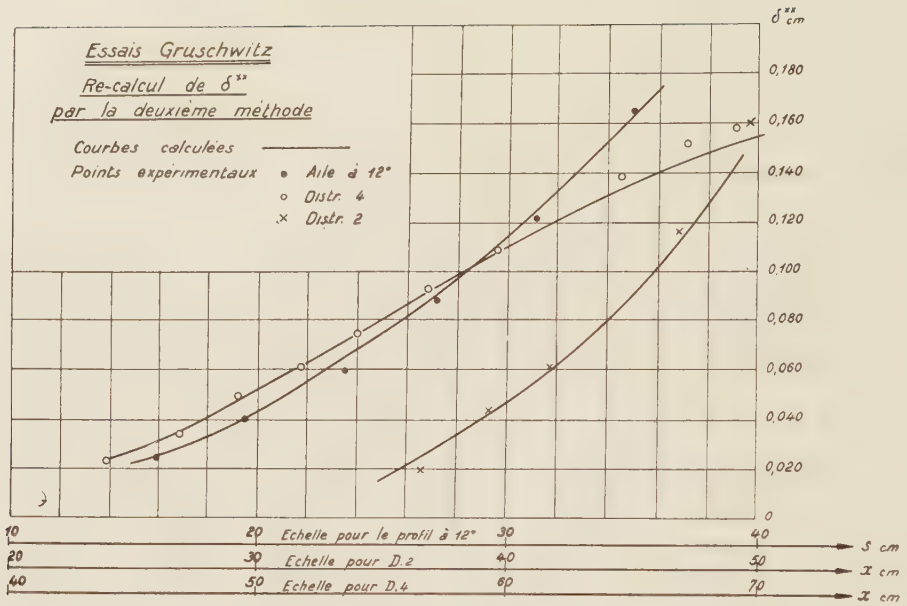


Fig. 31

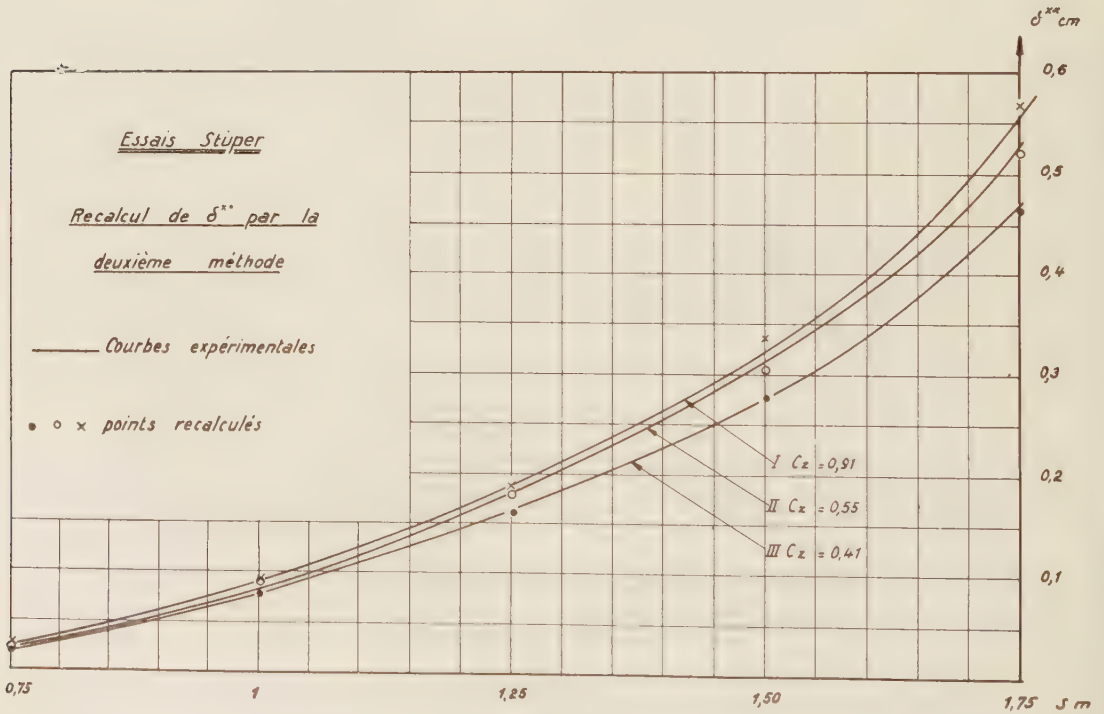


Fig. 32

A titre d'exemple nous donnons le calcul détaillé de l'épaisseur de quantité de mouvement pour le profil B à l'incidence 6° .

Transition en $s_T = 0,08$ m du B. A.

$$\text{avec } \begin{cases} \delta^{**} = 0,00014 \text{ m, } \frac{1}{V} \frac{dV}{ds} = 0,75, \\ V = 46 \text{ m/s } \left(\frac{V \delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4} = 4,6, \\ \delta^{**} \frac{dV}{V ds} \left(\frac{V \delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4} = 0,00048. \end{cases}$$

la courbe figure 26 donne : $\frac{s_T - s_0}{V} \frac{dV}{ds} = 0,030$

donc : $s_T - s_0 = 0,04$ m.

s_0 origine fictive de la couche turbulente = 0,04 m du B. A.

s_{T-m}	s_{V-m}	$\frac{1}{V} \frac{dV}{ds} \text{ m et s}$	$\frac{s}{V} \frac{dV}{ds}$	$\frac{d\delta^{**}}{ds} \left(\frac{V \delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$	$\frac{1}{5} \left(\frac{V}{\nu} \right)^{1/4}$	$\frac{d}{ds} \delta^{**5/4}$	$\delta_m^{**5/4}$	δ_m^{**}
0,08	0,04	0,75	0,030	0,0140	33,9	0,00041	0,000015	0,00014
0,10	0,06	0,25	0,010	0,0127	33,8	37 ₅	23	19
0,14	0,10	0,33	0,033	0,0145	33,75	38 ₅	37 ₅	28,
0,18	0,14	0,45	0,063	0,0165	33,6	47 ₅	53 ₅	38
0,22	0,18	0,48	0,086	0,0175	33,45	52 ₅	73 ₅	49 ₅
0,28	0,24	0,51	0,122	0,0215	33,2	64 ₅	0,000109 ₅	67 ₅
0,34	0,30	0,70	0,210	0,0310	32,8	94 ₅	157 ₅	95 ₅
0,38	0,34	0,75	0,255	0,0365	32,6	0,00112	197 ₅	0,00108
0,42	0,38	0,80	0,304	0,0450	32,35	139	247 ₅	130 ₅
0,46	0,42	0,85	0,357	0,0555	32	173	309 ₅	155
0,50	0,46	0,96	0,441	0,0745	31,7	235	389 ₅	186
0,54	0,50	1,20	0,600	0,1150	31,3	367	507 ₅	232
0,56	0,52	1,31	0,680	0,1370	31,05	440	587 ₅	260
0,58	0,54	1,41	0,761	0,1600	30,85	520	683 ₅	292
0,60	0,56	1,55	0,868	0,1950	30,65	636	799 ₅	334

CHAPITRE V

CALCUL DU PARAMÈTRE DE FORME H ET DE L'ÉPAISSEUR DE DÉPLACEMENT

1. Intérêt d'un tel calcul. Détermination du Cx.

Ayant ainsi calculé l'épaisseur de quantité de mouvement, il nous reste à étudier le comportement du paramètre de forme ou de l'épaisseur de déplacement.

L'équation des quantités de mouvement montre que la connaissance en plus de δ^{**} de l'une ou l'autre de ces grandeurs, permet de déterminer l'évolution du coefficient de frottement local.

Pratiquement, le calcul du frottement local au moyen de l'équation des quantités de mouvement est toujours très délicat.

$\frac{C_x}{\rho V^2}$ est une quantité petite, apparaissant comme la différence de deux quantités $\frac{d\delta^{**}}{dx}$ et $(H+2) \left| \frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \right|$ beaucoup plus grandes, d'où une possibilité d'erreur importante.

Dans le cas d'un profil d'aile il est de plus nécessaire de calculer le frottement laminaire. (Voir appendice p. 127 un exemple de calcul des cf. locaux.)

Une méthode plus rapide consiste à utiliser les valeurs de δ^{**} et de H au bord de fuite de l'aile.

C'est la méthode SQUIRE-YOUNG (réf. 13) qui fait suite au calcul des couches limites exposé p. 58.

Dans le sillage, jonction à l'arrière de l'aile des couches limites d'extrados et d'intrados, l'équation des quantités de mouvement s'écrit :

$$0 = \frac{d\delta^{**}}{dx} + (H+2) \frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx}$$

$$\frac{1}{\delta^{**}} \frac{d\delta^{**}}{dx} = - (H+2) \frac{d}{dx} \left[\log_e \left(\frac{V}{V_0} \right) \right]$$

Intégrant cette équation du bord de fuite à l'infini aval on obtient :

$$\left[\log \delta^{**} \right]_{\infty}^{BF} = - \left[(H+2) \log \frac{V}{V_0} \right]_{\infty}^{BF} + \int_{\infty}^{BF} \log \left(\frac{V}{V_0} \right) \frac{dH}{dx} dx$$

$$\log \frac{\delta_{BF}^{**}}{\delta_{\infty}^{**}} + (H_{BF} + 2) \log \frac{V_{BF}}{V_o} = \int_{\infty}^{BF} \log \frac{V}{V_o} dH$$

$$\delta_{\infty}^{**} = \delta_{BF}^{**} \left(\frac{V_{BF}}{V_o} \right)^{H_{BF} + 2} e^{\int_{\infty}^{BF} \log \frac{V}{V_o} dH}$$

Il reste à introduire une relation entre H et V, relation fournie par des essais anglais (réf. 16).

Dans le sillage H est fonction linéaire de $\log \frac{V_o}{V}$.

A l'infini aval H est égal à 1 et la relation est obligatoirement :

$$H - 1 = A \log \frac{V_o}{V} \text{ donc } \frac{\log \frac{V_o}{V}}{\log \frac{V_o}{V_{BF}}} = \frac{H-1}{H_{BF}-1}$$

$$\int_{\infty}^{BF} \log \frac{V_o}{V} dH = \int_1^{H_{BF}} \log \frac{V_o}{V} dH = \frac{\log \frac{V_o}{V_{BF}}}{H_{BF}-1} \int_1^{H_{BF}} (H-1) dH = \frac{H_{BF}-1}{2} \log \frac{V_o}{V_{BF}}$$

$$e^{\int_{\infty}^{BF} \log \frac{V_o}{V} dH} = \left(\frac{V_o}{V_{BF}} \right)^{\frac{H_{BF}-1}{2}} \text{ et } \boxed{\delta_{\infty}^{**} = \delta_{BF}^{**} \left(\frac{V_{BF}}{V_o} \right)^{\frac{H_{BF}+5}{2}}}$$

La perte de quantité de mouvement entre l'infini amont et l'infini aval est $\delta_{\infty}^{**} \rho V_o^2$.

Il n'y a pas de variation des forces de pression donc $\delta_{\infty}^{**} \rho V_o^2$ représente la résistance de l'aile et l'on a (pour une envergure unité) :

$$R_x = \delta_{\infty}^{**} \rho V_o^2 \quad C_x p = \frac{\delta_{\infty}^{**} \rho V_o^2}{\rho/2 \cdot \bar{C} V_o^2} = \frac{2\delta_{\infty}^{**}}{\bar{C}}$$

$$C_x p = \frac{2\delta_{BF}^{**}}{\bar{c}} \left(\frac{V_{BF}}{V_o} \right)^{\frac{H_{BF}+5}{2}}$$

$\bar{c}$ est la corde du profil.

H_{BF} est le paramètre de forme total au bord de fuite, c'est-à-dire calculé en tenant compte des couches limites d'intrados et d'extrados :

$$H_{BF} = \frac{\delta_{intrados}^* + \delta_{extrados}^*}{\delta_{intrados}^{**} + \delta_{extrados}^{**}}$$

δ_{BF}^{**} est de même la somme de δ^{**} intrados et de δ^{**} extrados.

Il est donc, en principe, nécessaire de calculer également le paramètre de forme jusqu'au bord de fuite pour obtenir le C_{xp} .

Notons toutefois, que H_{BF} est en quelque sorte une moyenne entre le paramètre de forme au bord de fuite de l'extrados et le paramètre de forme au bord de fuite de l'intrados : le premier sera grand aux incidences positives et faible aux négatives ; pour le second ce sera l'inverse, mais on doit s'attendre à ce que H_{BF} évolue assez peu avec l'incidence.

C'est ce qui a permis à SQUIRE et YOUNG de proposer certaines valeurs du paramètre de forme moyen au bord de fuite : 1,4, 1,5 ou 1,6 suivant l'épaisseur.

L'adoption de ces valeurs permet déjà une bonne approximation du C_{xp} .

Nous allons tout de même essayer maintenant de calculer le paramètre de forme ou l'épaisseur de déplacement.

2. Évolution du paramètre de forme dans le cas de gradients de pression positifs.

L'évolution du paramètre de forme pour les couches turbulentes avec gradients de pression semble à première vue assez complexe.

On peut toutefois admettre, de l'examen général de nos résultats expérimentaux, que pour une couche limite turbulente établie à gradients de pression positifs, H est croissant.

L'étude de la transition nous a indiqué que le paramètre décroissait rapidement lors du passage de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent, mais cette évolution reste progressive, et l'on devra parcourir un certain chemin en couche limite turbulente avant que H ne se mette à croître du fait de l'existence de gradients positifs.

On ne peut donc espérer retrouver par le calcul les valeurs expérimentales de H dans la partie suivant la transition, mais seulement au bout d'un certain parcours vers le bord de fuite.

Cette restriction étant faite, nous avons essayé de relier le paramètre de forme aux différents paramètres « physiques » influençant la croissance de la couche limite.

Nous avons vu que d'après LEES H était fonction de $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ alors que d'après BURI, $\frac{\delta_{BF}^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V \delta_{BF}^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$ étant paramètre de forme, H ne devait être fonction que de lui.

Nous avons essayé de vérifier ces hypothèses, et nous avons porté figure 33, II en fonction de $\frac{x}{v} \frac{dV}{dx}$ et de $\frac{\delta^{xx}}{v} \frac{dV}{dx} \left(\frac{v \delta^{xx}}{v} \right)^{1/4}$.

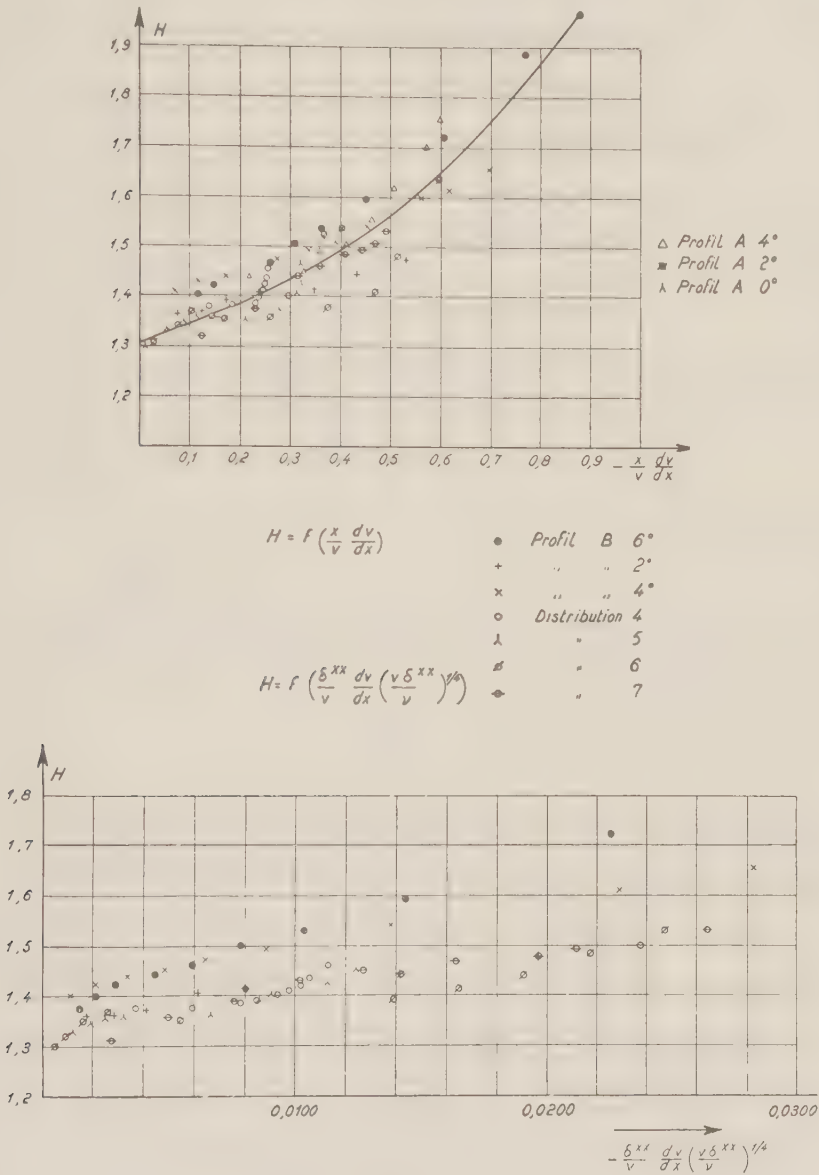


Fig. 33

Le résultat est peu probant; les points tirés de nos expériences sont trop dispersés pour qu'on puisse déduire de ces graphiques une relation précise entre H et l'un ou l'autre des deux paramètres.

Notons toutefois, qu'il est possible d'obtenir de ces résultats expérimentaux une relation approchée entre H et $\frac{x}{v} \frac{dV}{dx}$.

Le maximum de l'erreur possible en calculant H au moyen de cette courbe semble alors être de 6 à 7 p. 100 et le C_{xp} pourra être déterminé avec une bonne approximation, l'erreur sur $\frac{H+5}{2}$ étant alors de l'ordre de 1,5 p. 100.

La courbe $H = f\left(\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}\right)$ déduite de nos essais est assez éloignée de la loi $H = a + b \frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ proposée par LEES; nous signalerons à ce sujet que le graphique correspondant de LEES montrait une dispersion bien supérieure.

La dispersion des points expérimentaux énoncée nous a conduit à nous demander si, comme pour δ^{**} , la valeur de H en un point ne dépendait pas de son évolution antérieure.

Tel semble bien être le principe de la méthode GRUSCHWITZ dans laquelle H se calcule « pas à pas ».

L'épaisseur de déplacement δ^* doit alors elle aussi se calculer par une méthode pas à pas, et c'est à δ^* que nous allons maintenant porter notre attention.

3. Relation entre $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ et $\frac{\delta^*}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{v}\right)^{1/4}$.

Parmi les méthodes de calcul exposées au chapitre II une seule fait intervenir l'épaisseur de déplacement; c'est la méthode NIKURADSE, et le paramètre caractéristique en est $\frac{\delta^*}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{v}\right)^{1/4}$ semblable au paramètre de BURI $\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{v}\right)^{1/4}$.

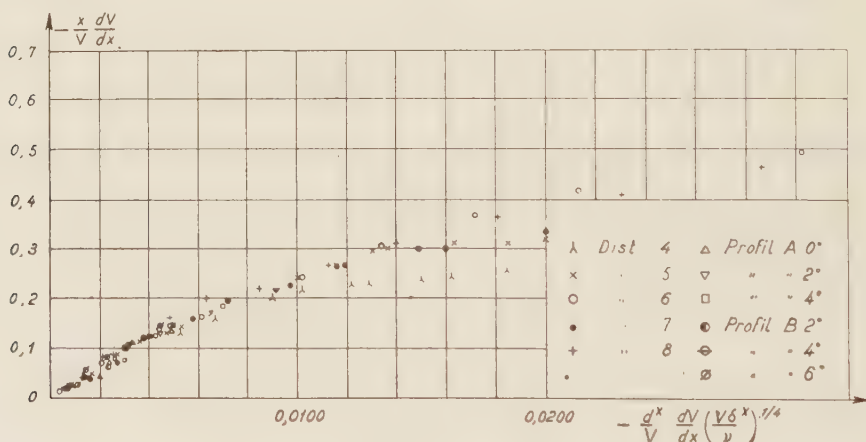


Fig. 34-1

Par analogie avec le raisonnement fait pour δ^{**} nous avons cherché à voir si $\frac{\delta^*}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{v}\right)^{1/4}$ était également reliable à $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ et nous avons porté l'un en fonction de l'autre (pour nos essais sur la plaque et les profils) [voir fig. 34 et tableaux 30 à 40].

Il est tout à fait remarquable de constater que le résultat obtenu est rigoureusement semblable à celui obtenu dans le cas de l'épaisseur de quantité de mouvement.

Pour les faibles valeurs des deux paramètres, les points se groupent bien sur une même courbe, mais s'en écartent à mesure qu'augmente le chemin parcouru.

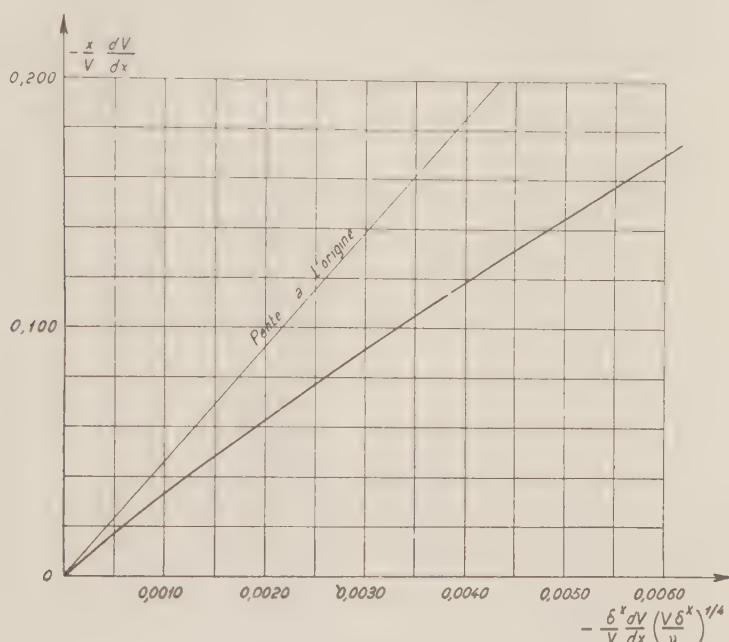


Fig. 34-a

Le raisonnement tenu pour δ^{**} est encore valable : l'épaisseur δ^* n'est pas directement reliable au paramètre local $\frac{x}{\bar{V}} \frac{dV}{dx}$ sauf pour des chemins parcourus suffisamment faibles pour que l'évolution antérieure de δ^* n'ait pas d'influence sur sa grandeur.

Là encore la pente à l'origine de la courbe trouvée est connue :

C'est la limite du rapport $\frac{\delta^* \frac{dV}{dx} \left(\frac{V \delta^*}{\nu} \right)^{1/4}}{\frac{x}{\bar{V}} \frac{dV}{dx}}$ quand $\frac{x}{\bar{V}} \frac{dV}{dx}$ donc $\frac{dV}{dx}$ tend vers 0.

C'est donc la valeur de $\frac{\delta^*}{x} \left(\frac{V \delta^*}{\nu} \right)^{1/4}$ pour le gradient nul $\frac{\delta^*}{x} \left(\frac{V \delta^*}{\nu} \right)^{1/4} = \frac{\delta^{**}}{x} \left(\frac{V \delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$ puisque $H = 1,3$, la pente à l'origine est : $0,0156 \times 1,39 = 0,0217$.

4. Relation entre $\frac{x}{\bar{V}} \frac{dV}{dx}$ et $\frac{d\delta^*}{dx} \left(\frac{V \delta^*}{\nu} \right)^{1/4}$.

Poursuivant notre raisonnement, par analogie avec δ^{**} , nous avons essayé de vérifier s'il existait également une relation entre $\frac{x}{\bar{V}} \frac{dV}{dx}$ et $\frac{d\delta^*}{dx} \left(\frac{V \delta^*}{\nu} \right)^{1/4}$ que nous avons portés l'un en fonction de l'autre (voir fig. 35 et tableaux 30 à 40).



Fig. 35 A

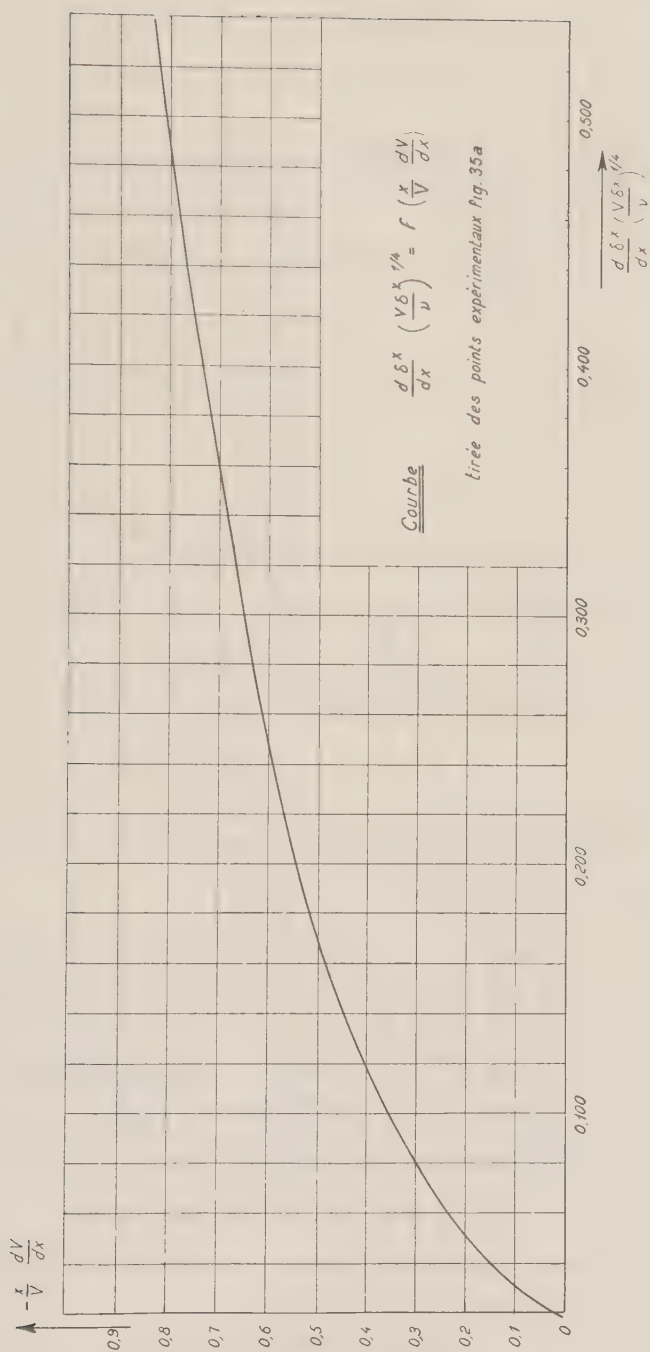


Fig. 35 B

La figure 35 montre encore qu'une relation entre les deux paramètres existe, relation du même genre que celle trouvée pour $\frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$.

Les observations faites dans le cas de δ^{**} peuvent être à nouveau exposées : il existe une certaine dispersion des points, dispersion assez normale puisqu'il s'agit de dérivées de courbes expérimentales.

Le re-calcul de δ^* par la méthode de calcul qui se déduit de l'existence de cette deuxième courbe, montrera seul si une telle dispersion était tolérable.

La valeur de $\frac{d\delta^*}{dx} \left(\frac{V\delta^*}{\nu} \right)^{1/4}$ pour $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx} = 0$ est encore donnée par sa valeur dans le cas du gradient nul :

$$\frac{d\delta^*}{dx} \left(\frac{V\delta^*}{\nu} \right)^{1/4} = H^{5/4} \frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4} = 0,01255 \times 1,39 = 0,0174$$

(Pour le gradient nul $H = C^{tc} = 1,3$.)

5. Méthode de calcul de l'épaisseur de déplacement.

La méthode découlant de l'existence des courbes :

$$\frac{\delta^*}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^*}{\nu} \right)^{1/4} = f \left(\frac{x}{V} \frac{dV}{dx} \right) \text{ et } \frac{d\delta^*}{dx} \left(\frac{V\delta^*}{\nu} \right)^{1/4} = f \left(\frac{x}{V} \frac{dV}{dx} \right)$$

est alors la suivante :

1. L'origine de la couche limite turbulente ayant été déterminée (chapitre IV, § 2 bis), $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ est connu au point de transition.

La première courbe nous donnera $\frac{\delta^*}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^*}{\nu} \right)^{1/4}$ au point de transition, donc $\delta^{*5/4}$ et δ^* .

2. Connaissant les valeurs de $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ tout le long de la surface, la deuxième courbe nous donnera les valeurs de $\frac{d\delta^*}{dx} \left(\frac{V\delta^*}{\nu} \right)^{1/4}$, et en divisant par $\frac{4}{5} \left(\frac{V}{\nu} \right)^{1/4}$ les valeurs de $\frac{d(\delta^{*5/4})}{dx}$; intégrant alors à partir de la valeur trouvée pour $\delta^{*1/4}$ au point de transition, on obtiendra $\delta^{*5/4}$ et δ^* tout le long de la surface.

Nous avons ainsi recalculé les épaisseurs de déplacement pour nos distributions 4, 5, 6, 7 et 8 sur la plaque et pour nos essais sur les profils.

La comparaison entre calcul et expériences est donnée sur les figures 36, 37, 38.

Elle montre dans l'ensemble un accord très acceptable.

À titre d'exemple nous donnons le calcul détaillé de l'épaisseur de déplacement pour le profil A braqué à l'incidence 2°.

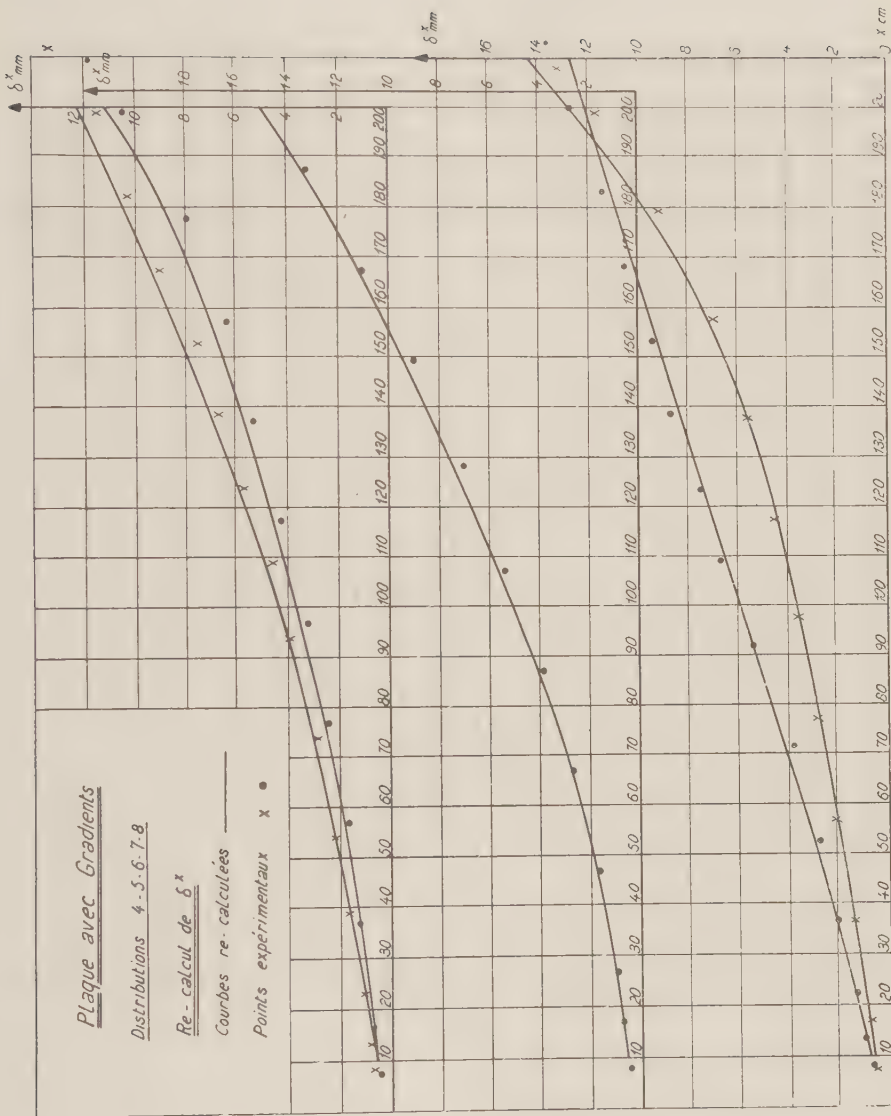


Fig. 36

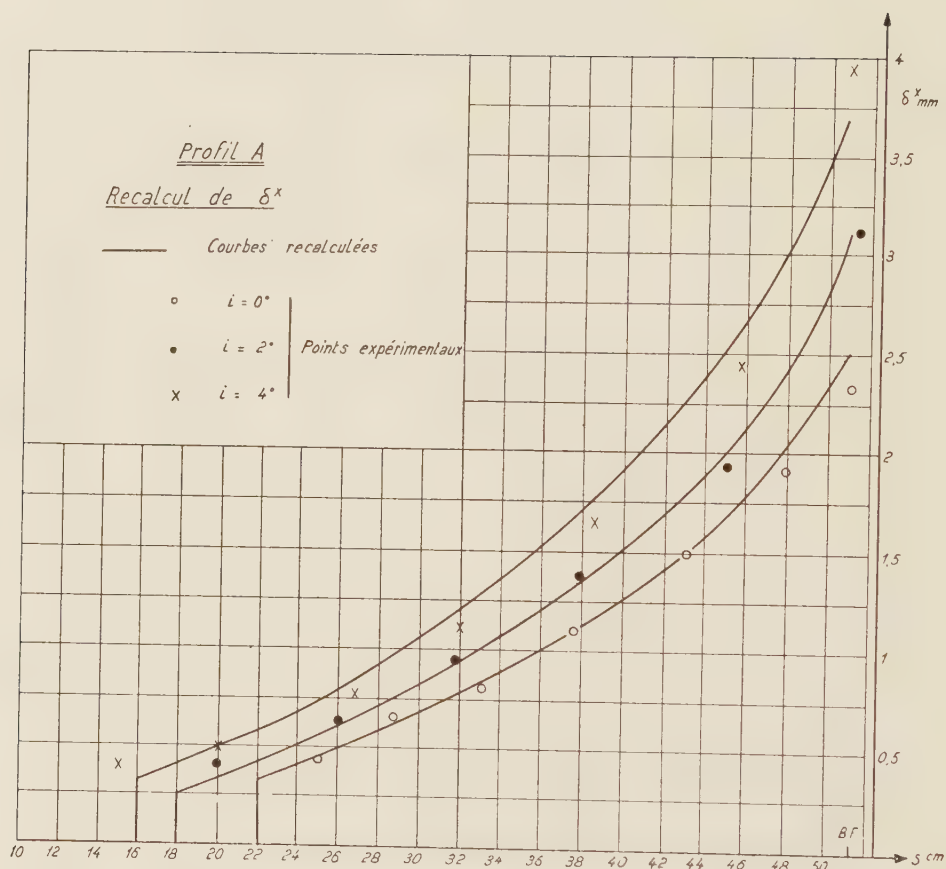


Fig. 37

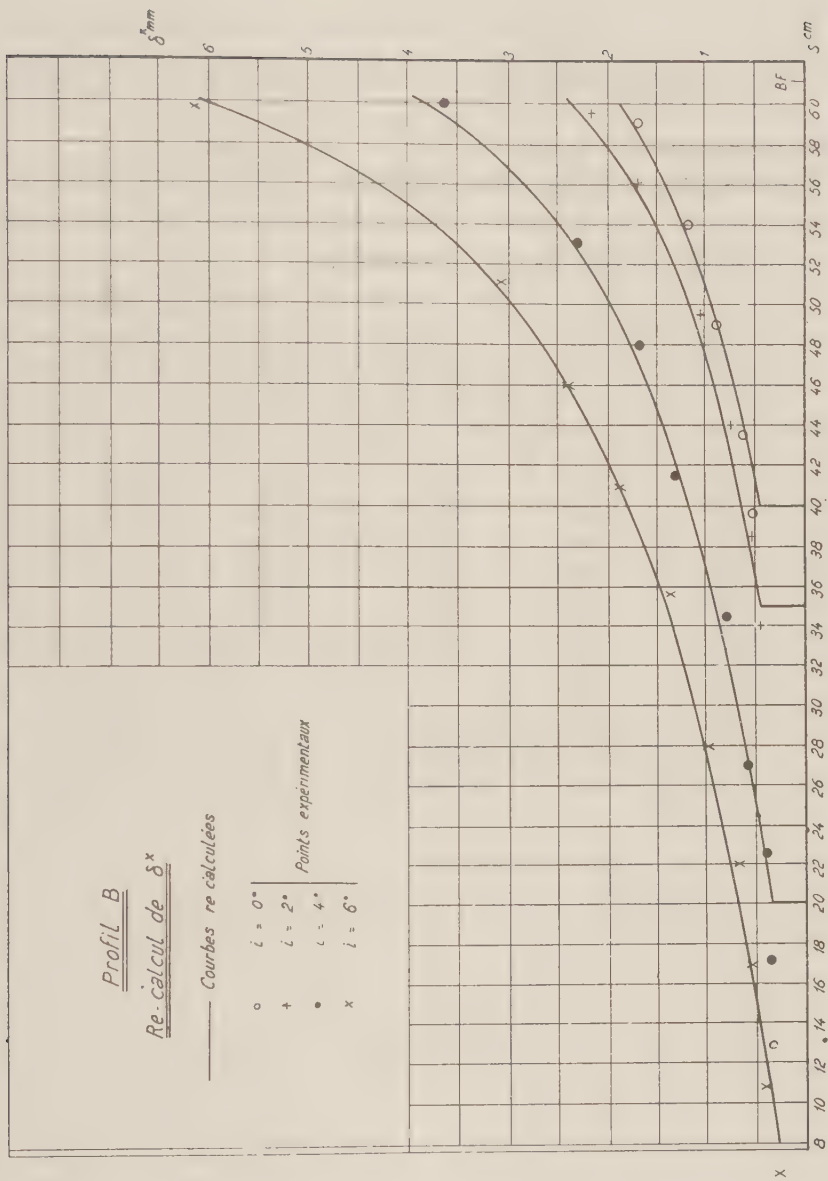


Fig. 38

CALCUL DE δ^*

Profil A

$i = 2^\circ$

Au pint de transition $\frac{1}{\bar{V}} \frac{dV}{ds} = 0,93 \quad \left(\frac{V}{\nu}\right)^{1/4} = 41,5$
 $s = 0,18$ m. du B. A.

$$\frac{s}{\bar{V}} \frac{dV}{ds} = 0,037$$

La courbe $\frac{\delta^*}{\bar{V}} \frac{dV}{ds} \left(\frac{V\delta^*}{\nu}\right)^{1/4} = f\left(\frac{s}{\bar{V}} \frac{dV}{ds}\right)$ (fig. 32) donne $\frac{\delta^*}{\bar{V}} \frac{dV}{ds} \left(\frac{V\delta^*}{\nu}\right)^{1/4} = 0,00120$

donc $\delta^{*5/4} = \frac{0,00120}{41,5 \times 0,93} = 0,000031 \quad \delta^* = 0,00025$ m.

$S_{B.A}^m$	$\frac{s}{\bar{V}} \frac{dV}{ds}$	$\frac{d\delta^*}{ds} \left(\frac{V\delta^*}{\nu}\right)^{1/4}$	$\frac{4}{5} \left(\frac{V}{\nu}\right)^{1/4}$	$\frac{d(\delta^{*5/4})}{ds}$	$\delta^{*5/4}$	δ_m^*
0,18	0,037	0,0200	33,2	0,00060	0,000031	0,00025
0,20	0,049	220	33,05	66	0,000043 _s	33
0,24	0,085	275	32,75	84	73 _s	51
0,28	0,129	355	32,45	0,00109	0,000112	70
0,32	0,171	450	32,1	140	162	93
0,36	0,216	560	31,8	176	225	0,00121
0,40	0,255	680	31,5	216	303 _s	153
0,44	0,303	820	31,2	263	399 _s	190
0,48	0,465	0,1500	30,85	486	549	246
0,50	0,560	0,2120	30,65	691	667	287
0,51	0,595	0,2460	30,50	805	741 _s	312

CHAPITRE VI

EXPOSÉ ET EXAMEN GÉNÉRAUX DE NOTRE MÉTHODE DE CALCUL DES COUCHES LIMITES TURBULENTES

Notre méthode de calcul des couches limites turbulentes se présente donc, dans son ensemble, comme suit :

1. Données nécessaires.

Distribution des vitesses potentielles sur toute la surface à étudier.

Position du point de transition de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent.

Valeur de l'épaisseur de quantité de mouvement au point de transition.

2. Conduite du calcul.

a. Calculer $\frac{1}{V} \frac{dV}{dx}$ et $\frac{4}{5} \left(\frac{V}{\nu} \right)^{1/4}$ tout le long de la surface donnée.

b Détermination de l'origine fictive de la couche turbulente :

Calculer $\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V \delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$ au point de transition.

La courbe $\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V \delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4} = f \left(\frac{x}{V} \frac{dV}{dx} \right)$ donne la valeur correspondante de $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ ce qui détermine la position de l'origine fictive.

c. Calcul de l'épaisseur de quantité de mouvement.

Calculer $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ tout le long de la surface.

Noter sur la courbe $\frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V \delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4} = f \left(\frac{x}{V} \frac{dV}{dx} \right)$ les valeurs correspondantes de $\frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V \delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$.

Diviser par $\frac{4}{5} \left(\frac{V}{\nu} \right)^{1/4}$ pour obtenir $\frac{d(\delta^{**})^{5/4}}{dx}$,

Intégrer à partir de la valeur de δ^{**} au point de transition pour obtenir $\delta^{**5/4}$ et δ^{**} .

d. Calcul de l'épaisseur de déplacement.

d-1. *Première méthode :*

- déterminer les valeurs de H d'après les valeurs de $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ par la courbe $H = f\left(\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}\right)$ figure 33;
- multiplier les valeurs trouvées pour δ^{**} par H pour obtenir δ^* .

d-2. *Deuxième méthode :*

- la valeur de $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ au point de transition donne la valeur correspondante de $\frac{\delta^*}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V \delta^*}{\nu}\right)^{1/4}$ par la courbe $\frac{\delta^*}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V \delta^*}{\nu}\right)^{1/4} = f\left(\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}\right)$,
- diviser par $\frac{1}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V}{\nu}\right)^{1/4}$ pour obtenir $\delta^{*5/4}$ au point de transition;
- à partir des valeurs de $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ noter sur la courbe $\frac{d\delta^*}{dx} \left(\frac{V \delta^*}{\nu}\right)^{1/4} = f\left(\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}\right)$ les valeurs de $\frac{d\delta^*}{dx} \left(\frac{V \delta^*}{\nu}\right)^{1/4}$,
- diviser par $\frac{4}{5} \left(\frac{V}{\nu}\right)^{1/4}$ pour obtenir $\frac{d(\delta^*)^{5/4}}{dx}$,
- intégrer à partir de la valeur trouvée pour $\delta^{*5/4}$ au point de transition pour obtenir $\delta^{*5/4}$ et δ^* .

3. Observations finales.

Cette méthode, qui reste une méthode de calcul « pas à pas » des couches limites turbulentes, présente l'avantage de ne pas nécessiter d'approximations successives.

L'utilisation d'abaques $\left(\frac{V}{\nu}\right)^{1/4} = f(V)$ et $N^{5/4} = f(N)$ doit permettre d'effectuer les calculs facilement; il s'agit d'une méthode rapide.

La comparaison avec l'expérience paraît concluante : l'accord est satisfaisant pour des couches limites turbulentes variées, et dont l'épaisseur varie du millimètre au décimètre.

L'épaisseur de quantité de mouvement au point de transition sera donnée par le calcul en couche laminaire jusqu'en ce point; notons, toutefois, qu'il ne sera pas nécessaire de calculer pour cette même couche laminaire l'épaisseur de déplacement.

En ce qui concerne les courbes $\frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V \delta^{**}}{\nu}\right)^{1/4} = f\left(\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}\right)$ et $\frac{d\delta^*}{dx} \left(\frac{V \delta^*}{\nu}\right)^{1/4} = f\left(\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}\right)$, nous avons pu les déterminer avec précision jusqu'à $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx} = 0,6$; au delà, les points expérimentaux sont moins nombreux, et il conviendrait peut-être de préciser ou de confirmer les courbes dans cette région par des essais répétés.

En tout cas, les parties bien précisées par nos expériences des deux courbes couvrent des valeurs de $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$ représentant déjà des gradients de pression importants, et doivent pouvoir s'appliquer dans un grand nombre de cas.

4. Changement de variables.

Dans le cas des profils, $\frac{s}{V} \frac{dV}{ds}$, $\frac{d\delta^{**}}{ds} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$ et $\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{ds} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$ peuvent également être considérés comme des fonctions des nombres $\Delta^{**} = \frac{\delta^{**}}{c}$, $S = \frac{s}{c}$ et $v = \frac{V}{V_o}$ c corde de profil.

On a en effet : $\frac{s}{V} \frac{dV}{ds} = \frac{S}{v} \frac{dv}{dS}$

$$\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{ds} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4} = \frac{\Delta^{**4/4}}{v} \frac{dv}{dS} \left(\frac{V}{V_o} \right)^{5/4} R_c^{1/4} \text{ avec } R_c = \left(\frac{V_o c}{\nu} \right) \text{ (} c \text{ corde du profil)}$$

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4} = \frac{d\Delta}{dS} \Delta^{1/4} \left(\frac{V}{V_o} \right)^{1/4} R_c^{1/4} = \frac{d(\Delta^{5/4})}{dS} \frac{4}{5} \left(\frac{V}{V_o} \right)^{1/4} R_c^{1/4}$$

et les identiques pour : $\frac{d\delta^{**}}{ds} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$ et $\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{ds} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$.

Le calcul des couches limites au moyen de ces nouvelles variables sera légèrement modifié, mais ce procédé présente l'intérêt de faire apparaître nettement le nombre de REYNOLDS $\frac{V_o c}{\nu}$ utilisé souvent comme caractéristique de l'écoulement autour d'un profil.

TABLEAUX DES VALEURS EXPÉRIMENTALES

De l'épaisseur de quantité de mouvement δ^{**} .

De l'épaisseur de déplacement δ^* .

Du paramètre de forme H.

Essais sur la plaque.

TABLEAU 1. — *Plaque sans gradient (1^{re} série)*

x cm.	δ^{**} mm.	δ^* mm.	H.
8	0,25	0,55	2,20
13	0,28	0,62	2,20
23	0,33	0,72	2,18
28	0,38	0,75	1,97
33	0,58	0,80	1,38
38	0,80	1,07	1,34
48	0,98	1,31	1,34
68	1,34	1,76	1,31
78	1,43	1,90	1,33
86	1,56	2,04	1,31
103	1,88	2,50	1,33
121	2,19	2,89	1,32
150	2,58	3,40	1,32
180	2,98	3,92	1,315
222	3,17	4,18	1,32
239	3,48	4,55	1,305
257	3,72	4,86	1,31
288	3,90	5,10	1,31

TABLEAU 2. — *Plaque sans gradient (2^e série)*

x cm.	δ^{**} mm.	δ^* mm.	H.
13	0,44	0,61	1,38
28	0,78	1,03	1,32
48	1,05	1,40	1,33
68	1,36	1,78	1,31
86	1,63	2,15	1,32
118	2,18	2,86	1,31
150	2,74	3,56	1,30
180	3,48	4,52	1,30
220	3,86	5,01	1,30
257	4,18	5,46	1,30
290	4,36	5,69	1,30

TABLEAU 3. — *Plaque sans gradient (3^e série)*

x cm.	δ^{**} mm.	δ^* mm.	H.
94	1,54	2,00	1,30
109	1,91	2,52	1,32
139	2,31	3,03	1,31
169	2,82	3,72	1,32
199	3,64	4,72	1,30
229	4,00	5,22	1,305
259	4,25	5,50	1,295

TABLEAU 4. — *Distribution n° 1*

x cm.	δ^{**} mm.	δ^* mm.	H.
94	1,54	2,00	1,30
109	1,91	2,50	1,305
124	2,27	3,03	1,33
139	2,60	3,49	1,34
154	3,04	4,12	1,36
169	3,45	4,73	1,37
184	3,85	5,32	1,38
199	4,28	5,93	1,38
214	4,90	6,78	1,38
229	5,45	7,52	1,38
244	6,09	8,40	1,395
274	7,47	10,45	1,40

TABLEAU 5. — *Distribution n° 2*

x cm.	δ^{**} mm.	δ^* mm.	H.
109	1,95	2,60	1,33
124	2,55	3,46	1,355
139	3,07	4,25	1,38
154	3,54	4,93	1,39
169	4,44	6,01	1,355
184	4,82	6,85	1,42
199	5,86	8,32	1,44
214	6,67	9,59	1,455
229	7,53	10,91	1,455
244	8,43	12,26	1,455
259	9,46	13,79	1,475
274	10,52	15,55	1,475
289	11,65	17,35	1,49

TABLEAU 6. — *Distribution n° 3*

x cm.	δ^{**} mm.	δ^* mm.	H.
109	2,22	2,92	1,32
138	3,62	5,10	1,41
155	4,53	6,46	1,425
185	6,67	9,75	1,46
215	9,11	13,90	1,525
245	12,08	18,95	1,57
260	13,65	21,76	1,59
275	15,50	25,60	1,65
290	16 92	27,90	1,65

TABLEAU 7. — *Distribution n° 4*

x cm.	δ^{**} mm.	δ^* mm.	H.
8	0,48	0,66	1,375
13	0,72	0,99	1,375
22	0,89	1,22	1,37
37	1,44	2,01	1,395
52	1,97	2,70	1,37
72	2,78	3,80	1,37
92	3,83	5,31	1,39
109	4,73	6,60	1,395
123	5,22	7,37	1,41
138	6,08	8,55	1,41
53	6,56	9,32	1,42
163	7,19	10,26	1,43
183	7,85	11,35	1,445
199	8,63	12,50	1,45
214	9,30	13,62	1,465
229	10,84	16,08	1,48
243	12,83	19,30	1,50
257	14,04	21,60	1,54
287	16,04	24,40	1,52

TABLEAU 8. — *Distribution n° 5*

x cm.	δ^{**} mm.	δ^* mm.	H.
3	0,54	0,72	1,33
13	0,63	0,84	1,33
23	0,83	1,12	1,34
39	1,24	1,67	1,345
54	1,63	2,24	1,37
74	2,26	2,99	1,325
94	2,95	3,97	1,345
109	3,45	4,64	1,345

TABLEAU 8. — *Distribution n° 5 (suite.)*

x cm.	δ^{**} mm.	δ^* mm.	H.
124	4,11	5,70	1,385
138	4,62	6,47	1,40
153	5,34	7,47	1,40
167	6,16	8,80	1,43
182	7,10	10,30	1,45
197	7,87	11,40	1,45
212	8,86	13,00	1,47
227	10,09	15,14	1,505
257	12,79	19,34	1,515
287	14,52	22,06	1,52

TABLEAU 9. — *Distribution n° 6*

x cm.	δ^{**} mm.	δ^* mm.	H.
7	0,29	0,48	1,65
17	0,52	0,66	1,27
37	0,99	1,31	1,32
57	1,49	2,04	1,37
77	2,01	2,77	1,38
97	2,64	3,58	1,355
117	3,32	4,44	1,34
137	4,05	5,48	1,355
157	4,96	6,80	1,37
179	6,33	8,96	1,415
198	7,89	11,50	1,46
207	8,74	12,94	1,48

TABLEAU 10. — *Distribution n° 7*

x cm.	δ^{**} mm.	δ^* mm.	H.
7	0,30	0,49	1,63
17	0,52	0,67	1,29
27	0,74	0,96	1,30
47	1,28	1,67	1,305
67	1,93	2,60	1,35
87	2,78	3,87	1,39
107	3,77	5,30	1,405
128	4,73	6,80	1,44
149	6,01	8,84	1,47
167	7,40	10,90	1,475
187	8,80	13,18	1,495
205	10,88	17,00	1,56

TABLEAU 11. — *Distribution n° 8*

x cm.	δ^{**} mm.	δ^* mm.	H.
7	0,34	0,57	1,68
17	0,59	0,80	1,355
37	0,95	1,27	1,34
57	1,23	1,69	1,375
77	1,86	2,54	1,37
97	2,35	3,22	1,37
117	3,10	4,25	1,37
137	3,86	5,32	1,38
157	4,53	6,20	1,37
178	5,81	7,91	1,36
198	7,26	10,45	1,44
208	8,15	11,87	1,455

Essais sur profils.

s distance curviligne au bord d'attaque.

TABLEAU 12. — *Profil A $i = 0^\circ$*

s cm.	δ^{**} mm.	δ^* mm.	H.
9,5	0,10	0,30	3,00
14,8	0,13	0,41	3,16
19,8	0,18	0,43	2,38
25	0,31	0,45	1,45
28,6	0,46	0,65	1,415
33	0,56	0,81	1,445
37,5	0,75	1,10	1,47
43	1,02	1,47	1,44
48	1,28	1,92	1,50
51,3	1,55	2,33	1,505

TABLEAU 13. — *Profil A $i = 2^\circ$*

s cm.	δ^{**} mm.	δ^* mm.	H.
9,7	0,09	0,25	2,78
14	0,14	0,35	2,50
20	0,24	0,40	1,66
26	0,44	0,62	1,41
32	0,65	0,94	1,445
38	0,93	1,37	1,47
44,7	1,28	1,93	1,51
51,2	1,90	3,11	1,64

TABLEAU 14. — *Profil A* $i = 4^{\circ}$

s cm.	δ^{**} mm.	δ^{*} mm.	H.
10	0,12	0,22	1,83
15	0,17	0,36	2,12
20	0,32	0,45	1,41
26,5	0,55	0,76	1,38
32	0,77	1,12	1,455
38,5	1,15	1,67	1,45
45,5	1,59	2,44	1,535
50,5	2,27	3,94	1,735

TABLEAU 15. — *Profil B* $i = 0^{\circ}$

s cm.	δ^{**} mm.	δ^{*} mm.	H.
39,5	0,27	0,52	1,93
43,5	0,41	0,59	1,44
49	0,63	0,90	1,43
54	0,82	1,20	1,465
59	1,14	1,71	1,49

TABLEAU 16. — *Profil B* $i = 2^{\circ}$

s cm.	δ^{**} mm.	δ^{*} mm.	H.
12	0,11	0,26	2,37
17	0,14	0,33	2,36
22	0,17	0,38	2,24
28	0,20	0,43	2,15
34	0,25	0,47	1,88
38,5	0,38	0,52	1,37
44	0,56	0,76	1,36
49,5	0,75	1,05	1,40
56	1,19	1,72	1,445
59,5	1,47	2,14	1,455

TABLEAU 17. — *Profil B* $i = 4^{\circ}$

s cm.	δ^{**} mm.	δ^{*} mm.	H.
12	0,14	0,34	2,43
17	0,17	0,37	2,18
22,5	0,25	0,39	1,56
27	0,38	0,55	1,45
34,5	0,56	0,80	1,43
41,5	0,88	1,30	1,48
48	1,14	1,66	1,46
53	1,52	2,34	1,54
60	2,18	3,63	1,67

TABLEAU 18. — *Profil B* $i = 6^\circ$

s cm.	δ^{**} mm.	δ^* mm.	H.
6,7	0,12	0,26	2,16
11,7	0,26	0,36	1,385
17	0,38	0,53	1,39
22	0,50	0,69	1,38
28	0,69	0,99	1,435
35,5	0,94	1,37	1,46
41	1,25	1,87	1,495
46	1,57	2,40	1,53
51	1,89	3,07	1,62
59,5	3,14	6,15	1,96

TABLEAUX DES VALEURS DE $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}, \frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}, \frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$

Essais sur la plaque.

x distance au début de la plaque.

x_v distance à l'origine de la couche limite turbulente.

Pour les distributions 4 et 5 : $x_v = x$.

Pour les distributions 6, 7 et 8 : $x_v = x - 0,05$ m.

TABLEAU 19. — *Distribution n° 4*

x m.	$\frac{1}{V} \frac{dV}{dx}$ (x en m.)	$\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$	$\frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$	$\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$
0,30	0,450	0,135	0,0207	0,0037
0,40	0,415	0,166	0,0221	0,0045
0,50	0,360	0,180	0,0255	0,0049
0,60	0,350	0,210	0,0315	0,0060
0,70	0,320	0,224	0,0375	0,0068
0,80	0,285	0,224	0,0412	0,0074
0,90	0,255	0,230	0,0438	0,0079
1,00	0,232	0,232	0,0442	0,0085
1,10	0,212	0,233	0,0437	0,0088
1,20	0,196	0,235	0,0436	0,0093
1,30	0,183	0,238	0,0430	0,0096
1,40	0,172	0,240	0,0422	0,0098
1,50	0,161	0,241	0,0421	0,0100
1,60	0,152	0,243	0,0417	0,0103
1,70	0,144	0,245	0,0416	0,0103
1,80	0,137	0,247	0,0416	0,0106
1,90	0,132	0,250	0,0416	0,0108
2,00	0,126	0,252	0,0412	0,0109
2,10	0,123	0,258	0,0412	0,0113

TABLEAU 20. — *Distribution n° 5*

x m.	$\frac{1}{V} \frac{dV}{dx}$	$\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$	$\frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{v} \right)^{1/4}$	$\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{v} \right)^{1/4}$
0,20	0,265	0,053	0,0168	0,0012
0,30	0,287	0,086	0,0185	0,0019
0,40	0,242	0,097	0,0200	0,0022
0,50	0,222	0,111	0,0215	0,0025
0,60	0,205	0,123	0,0226	0,0029
0,70	0,194	0,136	0,0242	0,0033
0,80	0,188	0,150	0,0257	0,0037
0,90	0,193	0,174	0,0276	0,0045
1,00	0,207	0,207	0,0296	0,0055
1,10	0,222	0,245	0,0316	0,0066
1,20	0,228	0,273	0,0345	0,0076
1,30	0,225	0,292	0,0376	0,0086
1,40	0,213	0,298	0,0410	0,0091
1,50	0,202	0,304	0,0456	0,0098
1,60	0,193	0,309	0,0495	0,0104
1,70	0,185	0,315	0,0543	0,0113
1,80	0,177	0,318	0,0597	0,0115
1,90	0,169	0,321	0,0650	0,0125
2,00	0,162	0,324	0,0710	0,0135

TABLEAU 21. — *Distribution n° 6*

x m.	x_p m.	$\frac{1}{V} \frac{dV}{dx}$	$\frac{x_p}{V} \frac{dV}{dx}$	$\frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{v} \right)^{1/4}$	$\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{v} \right)^{1/4}$
0,20	0,15	0,140	0,021	0,0125	0,0005
0,30	0,25	0,188	0,047	0,0141	0,0010
0,40	0,35	0,208	0,073	0,0156	0,0014
0,50	0,45	0,194	0,087	0,0172	0,0017
0,60	0,55	0,176	0,097	0,0189	0,0020
0,70	0,65	0,159	0,103	0,0212	0,0022
0,80	0,75	0,150	0,112	0,0230	0,0025
0,90	0,85	0,150	0,127	0,0251	0,0029
1,00	0,95	0,150	0,142	0,0271	0,0034
1,10	1,05	0,144	0,152	0,0294	0,0038
1,20	1,15	0,140	0,168	0,0321	0,0043
1,30	1,25	0,162	0,203	0,0350	0,0055
1,40	1,35	0,186	0,251	0,0391	0,0071
1,50	1,45	0,211	0,307	0,0445	0,0092
1,60	1,55	0,238	0,370	0,0500	0,0117
1,70	1,65	0,255	0,421	0,0582	0,0140
1,80	1,75	0,264	0,461	0,0710	0,0165
1,90	1,85	0,267	0,494	0,0855	0,0191
2,00	1,95	0,261	0,510	0,1050	0,0219

TABLEAU 22. — *Distribution n° 7*

x m.	x_v m.	$\frac{1}{V} \frac{dV}{dx}$ (x en m.)	$\frac{x_v}{V} \frac{dV}{dx}$	$\frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{v} \right)^{1/4}$	$\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{v} \right)^{1/4}$
0,20	0,15	0,100	0,015	0,0136	0,0004
0,30	0,25	0,176	0,044	0,0167	0,0009
0,40	0,35	0,254	0,089	0,0195	0,0019
0,50	0,45	0,274	0,123	0,0226	0,0027
0,60	0,55	0,286	0,157	0,0249	0,0037
0,70	0,65	0,303	0,197	0,0295	0,0050
0,80	0,75	0,320	0,240	0,0328	0,0065
0,90	0,85	0,318	0,270	0,0363	0,0076
1,00	0,95	0,305	0,290	0,0398	0,0087
1,10	1,05	0,282	0,296	0,0440	0,0094
1,20	1,15	0,260	0,299	0,0477	0,0101
1,30	1,25	0,248	0,310	0,0522	0,0112
1,40	1,35	0,244	0,330	0,0572	0,0127
1,50	1,45	0,242	0,352	0,0624	0,0143
1,60	1,55	0,245	0,380	0,0680	0,0164
1,70	1,65	0,246	0,406	0,0740	0,0185
1,80	1,75	0,252	0,440	0,0805	0,0212
1,90	1,85	0,252	0,464	0,0887	0,0238
2,00	1,95	0,249	0,485	0,0995	0,0264

TABLEAU 23. — *Distribution n° 8*

x m.	x_v m.	$\frac{1}{V} \frac{dV}{dx}$	$\frac{x_v}{V} \frac{dV}{dx}$	$\frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{v} \right)^{1/4}$	$\frac{\delta^{**}}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^{**}}{v} \right)^{1/4}$
0,20	0,15	0	0	0,0123	0
0,30	0,25	0	0	0,0122	0
0,40	0,35	0	0	0,0121	0
0,50	0,45	0,055	0,025	0,0129	0,0004
0,60	0,55	0,145	0,080	0,0160	0,0014
0,70	0,65	0,187	0,128	0,0187	0,0023
0,80	0,75	0,227	0,170	0,0217	0,0032
0,90	0,85	0,224	0,190	0,0243	0,0038
1,00	0,95	0,211	0,200	0,0277	0,0043
1,10	1,05	0,193	0,203	0,0298	0,0045
1,20	1,15	0,178	0,205	0,0320	0,0047
1,30	1,25	0,166	0,207	0,0347	0,0051
1,40	1,35	0,163	0,220	0,0372	0,0057
1,50	1,45	0,167	0,242	0,0408	0,0066
1,60	1,55	0,174	0,270	0,0463	0,0078
1,70	1,65	0,188	0,310	0,0580	0,0096
1,80	1,75	0,208	0,365	0,0638	0,0120
1,90	1,85	0,226	0,418	0,0760	0,0148
2,00	1,95	0,242	0,470	0,0900	0,0179

Essais sur profils.

s distance curviligne au bord d'attaque du profil.

s_0 distance de l'origine fictive de la couche limite turbulente au bord d'attaque des profils.

s_v distance à l'origine de la couche turbulente $s_v = s - s_0$.

TABLEAU 24. — *Profil A* $i = 0^\circ$ $s_0 = 0,166$ m

s m.	s_v m.	$\frac{1}{V} \frac{dV}{ds}$	$\frac{s_v}{V} \frac{dV}{ds}$	$\frac{d\delta^{**}}{ds} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$
0,20	0,034	0,82	0,028	0,0139
0,22	0,054	0,81	0,044	0,0149
0,24	0,074	0,805	0,060	0,0163
0,26	0,094	0,81	0,076	0,0173
0,28	0,114	0,81	0,092	0,0187
0,30	0,134	0,80	0,118	0,0194
0,32	0,154	0,85	0,131	0,0203
0,34	0,174	0,82	0,143	0,0221
0,36	0,194	0,835	0,162	0,0251
0,38	0,214	0,85	0,182	0,0278
0,40	0,234	0,875	0,205	0,0302
0,42	0,254	0,91	0,249	0,0322
0,44	0,274	0,96	0,263	0,0345
0,46	0,294	0,98	0,288	0,0395
0,48	0,314	1,02	0,317	0,0467
0,50	0,334	1,06	0,354	0,0550
0,51	0,344	1,09	0,376	0,0660

TABLEAU 25. — *Profil A* $i = 2^\circ$ $s_0 = 0,14$ m

s m.	s_v m.	$\frac{1}{V} \frac{dV}{ds}$	$\frac{s_v}{V} \frac{dV}{ds}$	$\frac{d\delta^{**}}{ds} \left(\frac{V\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$
0,18	0,04	0,93	0,037	0,0141
0,20	0,06	0,82	0,049	0,0157
0,22	0,08	0,79	0,063	0,0166
0,24	0,10	0,85	0,085	0,0178
0,26	0,12	0,88	0,105	0,0198
0,28	0,14	0,92	0,129	0,0216
0,30	0,16	0,95	0,152	0,0244
0,32	0,18	0,95	0,171	0,0257
0,34	0,20	0,94	0,188	0,0283
0,36	0,22	0,98	0,216	0,0307
0,38	0,24	0,98	0,235	0,0324
0,40	0,26	0,98	0,255	0,0345
0,42	0,28	0,95	0,266	0,0372
0,44	0,30	1,01	0,303	0,0440
0,46	0,32	1,10	0,352	0,0540
0,48	0,34	1,37	0,465	0,0665
0,50	0,36	1,55	0,560	0,0900
0,51	0,37	1,61	0,595	0,1100

TABLEAU 26. — *Profil A* $i = 4^\circ$ $s_o = 0,112$ m

s m.	s_v m.	$\frac{1}{V} \frac{dV}{ds}$	$\frac{s_v}{V} \frac{dV}{ds}$	$\frac{d\mathcal{J}^{**}}{ds} \left(\frac{V\mathcal{J}^{**}}{v} \right)^{1/4}$
0,15	0,038	1,97	0,075	0,0175
0,16	0,048	1,47	0,073	0,0175
0,18	0,068	1,08	0,073	0,0177
0,20	0,088	0,94	0,083	0,0180
0,22	0,108	0,93	0,100	0,0188
0,24	0,128	0,95	0,122	0,0206
0,26	0,148	0,97	0,143	0,0218
0,28	0,168	0,99	0,166	0,0231
0,30	0,188	1,00	0,188	0,0258
0,32	0,208	1,03	0,214	0,0310
0,34	0,228	1,05	0,239	0,0345
0,36	0,248	1,05	0,260	0,0388
0,38	0,268	1,11	0,297	0,0426
0,40	0,288	1,12	0,322	0,0472
0,42	0,308	1,17	0,360	0,0529
0,44	0,328	1,23	0,403	0,0634
0,46	0,348	1,34	0,452	0,0780
0,48	0,368	1,37	0,504	0,0950
0,50	0,388	1,44	0,559	0,1160
0,51	0,398	1,48	0,590	0,1255

TABLEAU 27. — *Profil B* $i = 2^\circ$ $s_o = 0,29$ m

s m.	s_v m.	$\frac{1}{V} \frac{dV}{ds}$	$\frac{s_v}{V} \frac{dV}{ds}$	$\frac{d\mathcal{J}^{**}}{ds} \left(\frac{V\mathcal{J}^{**}}{v} \right)^{1/4}$
0,36	0,07	0,65	0,052	0,0174
0,38	0,09	0,71	0,064	0,0188
0,40	0,11	0,75	0,072	0,0200
0,42	0,13	0,79	0,103	0,0215
0,44	0,15	0,82	0,123	0,0228
0,46	0,17	0,85	0,144	0,0238
0,48	0,19	0,88	0,167	0,0257
0,50	0,21	0,92	0,193	0,0292
0,52	0,23	1,01	0,232	0,0356
0,54	0,25	1,14	0,285	0,0446
0,56	0,27	1,30	0,350	0,0551
0,58	0,29	1,47	0,425	0,0692
0,60	0,31	1,70	0,525	0,0865

TABLEAU 28. — *Profil B* $i = 4^\circ$ $s_0 = 0,15$ m

s m.	s_v m.	$\frac{1}{V} \frac{dV}{ds}$	$\frac{s_v}{V} \frac{dV}{ds}$	$\frac{d\mathcal{S}^{**}}{ds} \left(\frac{V\mathcal{S}^{**}}{v} \right)^{1/4}$
0,20	0,05	0,28	0,014	0,0125
0,22	0,07	0,30	0,021	0,0134
0,24	0,09	0,31	0,028	0,0140
0,26	0,11	0,33	0,036	0,0146
0,28	0,13	0,37	0,049	0,0151
0,30	0,15	0,41	0,062	0,0161
0,32	0,17	0,45	0,076	0,0175
0,34	0,19	0,58	0,111	0,0202
0,36	0,21	0,67	0,140	0,0232
0,38	0,23	0,72	0,165	0,0258
0,40	0,25	0,77	0,193	0,0281
0,42	0,27	0,80	0,217	0,0298
0,44	0,29	0,83	0,240	0,0314
0,46	0,31	0,87	0,270	0,0338
0,48	0,33	0,91	0,300	0,0380
0,50	0,35	0,96	0,336	0,0457
0,52	0,37	1,03	0,381	0,0578
0,54	0,39	1,14	0,445	0,0710
0,56	0,41	1,28	0,525	0,0845
0,58	0,43	1,42	0,610	0,0995
0,60	0,45	1,54	0,694	0,1150

TABLEAU 29. — *Profil B* $i = 6^\circ$ $s_0 = 0,04$ m

s m.	s_v m.	$\frac{1}{V} \frac{dV}{ds}$	$\frac{s_v}{V} \frac{dV}{ds}$	$\frac{d\mathcal{S}^{**}}{ds} \left(\frac{V\mathcal{S}^{**}}{v} \right)^{1/4}$
0,10	0,06	0,25	0,015	0,0113
0,12	0,08	0,27	0,022	0,0127
0,14	0,10	0,33	0,033	0,0135
0,16	0,12	0,43	0,052	0,0144
0,18	0,14	0,45	0,053	0,0155
0,20	0,16	0,46	0,073	0,0162
0,22	0,18	0,48	0,086	0,0170
0,24	0,20	0,49	0,098	0,0187
0,26	0,22	0,50	0,110	0,0205
0,28	0,24	0,51	0,122	0,0216
0,30	0,26	0,55	0,143	0,0234
0,32	0,28	0,64	0,179	0,0253
0,34	0,30	0,70	0,210	0,0278
0,36	0,32	0,73	0,234	0,0325
0,38	0,34	0,75	0,254	0,0340
0,40	0,36	0,78	0,280	0,0400
0,42	0,38	0,80	0,304	0,0456
0,44	0,40	0,83	0,332	0,0496
0,46	0,42	0,85	0,357	0,0545
0,48	0,44	0,88	0,387	0,0605
0,50	0,46	0,96	0,441	0,0680
0,52	0,48	1,08	0,520	0,0810
0,54	0,50	1,20	0,600	0,0980
0,56	0,52	1,31	0,680	0,1185
0,58	0,54	1,41	0,761	0,1520
0,60	0,56	1,55	0,870	0,2050

TABLEAUX DES VALEURS DE $\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}, \frac{d\delta^*}{dx} \left(\frac{V\delta^*}{v} \right)^{1/4}$ et $\frac{\delta^*}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^*}{v} \right)^{1/4}$

Essais sur la plaque.

TABLEAU 30. — *Distribution n° 4*

$\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$	$\frac{d\delta^*}{dx} \left(\frac{V\delta^*}{v} \right)^{1/4}$	$\frac{\delta^*}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^*}{v} \right)^{1/4}$
0,135	0,0312	0,0054
0,166	0,0354	0,0066
0,180	0,0401	0,0074
0,210	0,0450	0,0090
0,224	0,0545	0,0101
0,224	0,0645	0,0112
0,230	0,0665	0,0124
0,232	0,0680	0,0128
0,233	0,0680	0,0133
0,235	0,0676	0,0140
0,238	0,0680	0,0144
0,240	0,0690	0,0150
0,241	0,0690	0,0154
0,243	0,0700	0,0159
0,245	0,0716	0,0161
0,247	0,0735	0,0167
0,250	0,0754	0,0173
0,252	0,0780	0,0176
0,258	0,0810	0,0184

TABLEAU 31. — *Distribution n° 5*

$\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$	$\frac{d\delta^*}{dx} \left(\frac{V\delta^*}{v} \right)^{1/4}$	$\frac{\delta^*}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^*}{v} \right)^{1/4}$
0,053	0,0205	0,0018
0,086	0,0243	0,0028
0,097	0,0278	0,0031
0,111	0,0299	0,0037
0,123	0,0326	0,0041
0,136	0,0355	0,0047
0,150	0,0392	0,0053
0,174	0,0430	0,0066
0,207	0,0465	0,0082
0,245	0,0511	0,0100
0,273	0,0550	0,0116
0,292	0,0592	0,0130
0,298	0,0660	0,0138
0,304	0,0774	0,0152
0,309	0,0860	0,0162
0,315	0,0921	0,0178
0,318	0,0965	0,0185
0,321	0,0994	0,0200

TABLEAU 32. — *Distribution n° 6*

$\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$	$\frac{d\delta^*}{dx} \left(\frac{V\delta^*}{v} \right)^{1/4}$	$\frac{\delta^*}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^*}{v} \right)^{1/4}$
0,021	0,0190	0,0007
0,047	0,0204	0,0014
0,073	0,0243	0,0021
0,087	0,0280	0,0025
0,097	0,0300	0,0030
0,103	0,0326	0,0033
0,112	0,0338	0,0037
0,127	0,0348	0,0043
0,142	0,0358	0,0049
0,152	0,0375	0,0054
0,168	0,0431	0,0062
0,203	0,0500	0,0079
0,251	0,0587	0,0102
0,307	0,0710	0,0133
0,370	0,0848	0,0171
0,421	0,1023	0,0211
0,461	0,1237	0,0252
0,494	0,1496	0,0302
0,510	0,1823	0,0348

TABLEAU 33. — *Distribution n° 7*

$\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$	$\frac{d\delta^*}{dx} \left(\frac{V\delta^*}{v} \right)^{1/4}$	$\frac{\delta^*}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^*}{v} \right)^{1/4}$
0,015	0,0158	0,0005
0,044	0,0211	0,0013
0,089	0,0276	0,0026
0,123	0,0341	0,0038
0,157	0,0410	0,0052
0,197	0,0503	0,0072
0,240	0,0569	0,0097
0,270	0,0606	0,0119
0,290	0,0640	0,0137
0,296	0,0681	0,0148
0,299	0,0748	0,0159
0,310	0,0851	0,0175
0,330	0,0977	0,0200
0,352	0,1064	0,0229
0,380	0,1183	0,0269
0,406	0,1310	0,0305
0,440	0,1463	0,0351
0,464	0,1775	0,0399

TABLEAU 34. — *Distribution n° 8*

$\frac{x}{V} \frac{dV}{dx}$	$\frac{d\delta^*}{dx} \left(\frac{V\delta^*}{\nu} \right)^{1/4}$	$\frac{\delta^*}{V} \frac{dV}{dx} \left(\frac{V\delta^*}{\nu} \right)^{1/4}$
0,025	0,0200	0,0006
0,080	0,0256	0,0021
0,128	0,0287	0,0035
0,170	0,0334	0,0048
0,190	0,0367	0,0056
0,200	0,0407	0,00635
0,203	0,0432	0,0067
0,205	0,0454	0,0072
0,207	0,0463	0,0077
0,220	0,0465	0,0084
0,242	0,0512	0,0095
0,270	0,0705	0,0112
0,310	0,0926	0,0140
0,365	0,1113	0,0181
0,418	0,1294	0,0229
0,470	0,1453	0,0284

Essais sur profils.

TABLEAU 35. — *Profil A i = 0°*

$\frac{s}{V} \frac{dV}{ds}$	$\frac{d\delta^*}{ds} \left(\frac{V\delta^*}{\nu} \right)^{1/4}$	$\frac{\delta^*}{V} \frac{dV}{ds} \left(\frac{V\delta^*}{\nu} \right)^{1/4}$
0,028	0,0090	0,0019
0,044	0,0090	0,0020
0,076	0,0165	0,0024
0,118	0,0310	0,0034
0,143	0,0413	0,0049
0,182	0,0485	
0,249	0,0570	
0,288	0,0695	
0,317	0,0850	
0,354	0,1075	
0,386	0,1260	

TABLEAU 36. — *Profil A* $i = 2^\circ$

$\frac{s}{V} \frac{dV}{ds}$	$\frac{d\delta^*}{ds} \left(\frac{V\delta^*}{\nu} \right)^{1/4}$	$\frac{\delta^*}{V} \frac{dV}{ds} \left(\frac{V\delta^*}{\nu} \right)^{1/4}$
0,037	0,0140	0,0016
0,049	0,0177	0,0020
0,085	0,0285	0,0027
0,129	0,0390	0,0045
0,171	0,0455	0,0066
0,216	0,0517	0,0091
0,255	0,0590	
0,303	0,0892	
0,465	0,1460	
0,560	0,1850	
0,595	0,2120	

TABLEAU 37. — *Profil A* $i = 4^\circ$

$\frac{s}{V} \frac{dV}{ds}$	$\frac{d\delta^*}{ds} \left(\frac{V\delta^*}{\nu} \right)^{1/4}$	$\frac{\delta^*}{V} \frac{dV}{ds} \left(\frac{V\delta^*}{\nu} \right)^{1/4}$
0,073	0,0160	0,0031
0,073	0,0180	0,0027
0,100	0,0257	0,0033
0,143	0,0354	0,0049
0,188	0,0480	0,00705
0,239	0,0607	
0,297	0,0756	
0,360	0,1085	
0,452	0,1590	
0,504	0,1815	
0,559	0,2110	
0,590	0,2360	

TABLEAU 38. — *Profil B* $i = 2^\circ$

$\frac{s}{V} \frac{dV}{ds}$	$\frac{d\delta^*}{ds} \left(\frac{V\delta^*}{\nu} \right)^{1/4}$	$\frac{\delta^*}{V} \frac{dV}{ds} \left(\frac{V\delta^*}{\nu} \right)^{1/4}$
0,040	0,0180	0,0017
0,064	0,0185	0,0024
0,072	0,0190	0,0028
0,123	0,0284	0,0040
0,167	0,0473	0,0058
0,232	0,0700	0,0097
0,350	0,0980	
0,425	0,1130	
0,525	0,1410	

TABLEAU 39. — *Profil B* $i = 4^\circ$

$\frac{s}{V} \frac{dV}{ds}$	$\frac{d\delta^*}{ds} \left(\frac{V\delta^*}{\nu} \right)^{1/4}$	$\frac{\delta^*}{V} \frac{dV}{ds} \left(\frac{V\delta^*}{\nu} \right)^{1/4}$
0,014	0,0175	0,0006
0,028	0,0176	0,0009
0,049	0,0220	0,0014
0,076	0,0264	0,0022
0,140	0,0340	0,0044
0,193	0,0445	
0,240	0,0600	
0,300	0,0745	
0,381	0,1120	
0,445	0,1410	
0,525	0,1800	
0,694	0,2940	

TABLEAU 40. — *Profil B* $i = 6^\circ$

$\frac{s}{V} \frac{dV}{ds}$	$\frac{d\delta^*}{ds} \left(\frac{V\delta^*}{\nu} \right)^{1/4}$	$\frac{\delta^*}{V} \frac{dV}{ds} \left(\frac{V\delta^*}{\nu} \right)^{1/4}$
0,015	0,0130	0,0004
0,033	0,0188	0,0008
0,063	0,0237	0,0016
0,086	0,0287	0,0023
0,110	0,0309	0,0032
0,143	0,0405	0,0045
0,210	0,0486	
0,254	0,0619	
0,304	0,0833	
0,357	0,1037	
0,441	0,1470	
0,600	0,2880	
0,761	0,4710	
0,870	0,5900	

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. GIQUEAUX. — *Cours de Mécanique des Fluides théorique.*
2. NIKURADSÉ. — Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren (*V. D. I.*, Heft 356, 1932).
3. FEDIAEWSKY. — Turbulent boundary layer of an airfoil (*Journal of aeronautical Sciences*, 1937).
4. PRANDTL. — The mecanic of viscous fluids (*Aerodynamic theory*), Durand, éditeur.
5. NIKURADSÉ. — Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren (*V. D. I.*, Heft 356 1932).
6. KARMAN. — Turbulence and skin friction (*Journ. Aero. Sci.*, 1934).
7. NIKURADSÉ. — Couche limite turbulente le long d'une plaque (*ZWB-DVL*, 1942 ; traduction GRA, n° 644),
8. GUIRNE. — Non publié.
9. GRUSCHWITZ. — Die turbulente Reibungsschicht in ebener Strömung (*Ingenieur Archiv*, septembre 1931).
10. BURI. — Eine Berechnungsgrundlage für die turbulente Grenzschicht bei beschleunigter und verzögerter Grundströmung (*Zurich Dissertation*, 1931).
11. NIKURADSÉ. — Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in konvergenten und divergenten, Kanälen (*V. D. I.*, 1928, Heft 289).
12. LEES. — Influence of static pressure gradients on turbulent boundary layers (*Massachusetts Institut of Technology*, 1941).
13. SQUIRE et YOUNG. — The calculation of the profil drag of aerofoils (*Aero. Research Committee R. M.* 1838. novembre 1937).
14. JONES. — Flight experiments on the boundary layer (*Journ. Aero. Sci.*, janvier 1938).
15. STÜPER. — Untersuchung von Reibungsschichten an fliegenden Flugzeug (*Luftfahrtforschung*, mai 1934).

APPENDICE

Calcul des coefficients de frottements locaux.

Nous avons dit (p. 109), qu'il était délicat de calculer le frottement au moyen de l'équation des quantités de mouvement : il est préférable de revenir à notre hypothèse de départ :

$$\frac{\tau_o}{\rho V^2} = \frac{0,0225}{\left(\frac{V\delta}{\nu}\right)^{1/4}} = \frac{0,0225 \xi}{\left(\frac{V\delta^{**}}{\nu}\right)^{1/4}} \text{ avec } \xi = \left(\frac{\delta^{**}}{\delta}\right)^{1/4}$$

L'épaisseur de quantité de mouvement ayant été calculée, il suffit alors de déterminer tout le long de la surface les valeurs de ξ .

Nous avons vu (p. 75) que ξ était fonction de H et nous en avons donné, figure 22, les courbes déduites d'une représentation logarithmique et d'une représentation en puissance pour le profil des vitesses dans les couches limites, ainsi que la courbe issue de nos résultats expérimentaux.

La courbe expérimentale diffère peu de la courbe obtenue à partir d'une représentation en puissance pour le profil des vitesses; la différence entre les deux courbes est surtout notable aux grandes valeurs de H ($H > 1,6$); toutefois dans cette région, ξ évolue très peu avec H ; on utilisera sans grande différence l'une ou l'autre courbe.

Pour obtenir ξ il doit donc être suffisant de déterminer H au moyen de la relation approchée de la figure 31 : $H = f\left(\frac{x}{\bar{y}} \frac{dV}{dx}\right)$.

Nous avons calculé de cette façon les cf locaux pour le profil d'épaisseur 14 p. 100 de SQUIRE et YOUNG (référence 13) pour un point de transition choisi à $s = 0,376 c$ et au nombre de REYNOLDS $Re = 10^7$.

Les cf ainsi obtenus sont représentés figure 39 et comparés à ceux calculés par SQUIRE et YOUNG selon leur méthode exposée page 58.

Dans une première comparaison, nous avons trouvé une différence notable; mais, compte tenu du fait que les cf de SQUIRE et YOUNG avaient été rapportés à V_o et non à V , les courbes ont dû être modifiées à la correction des épreuves.

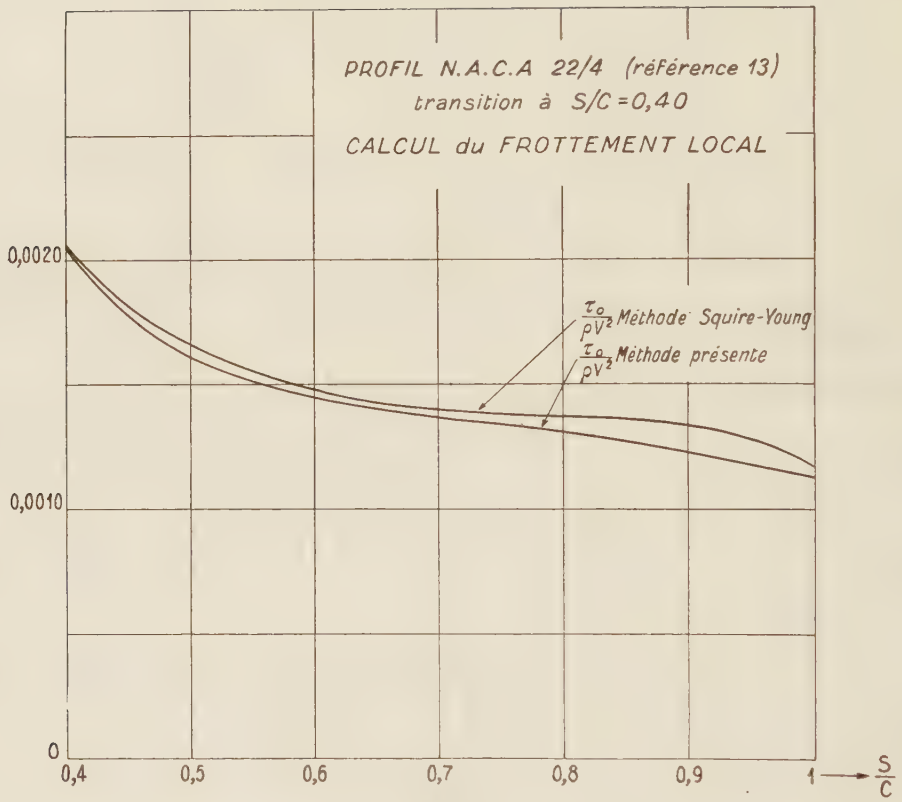
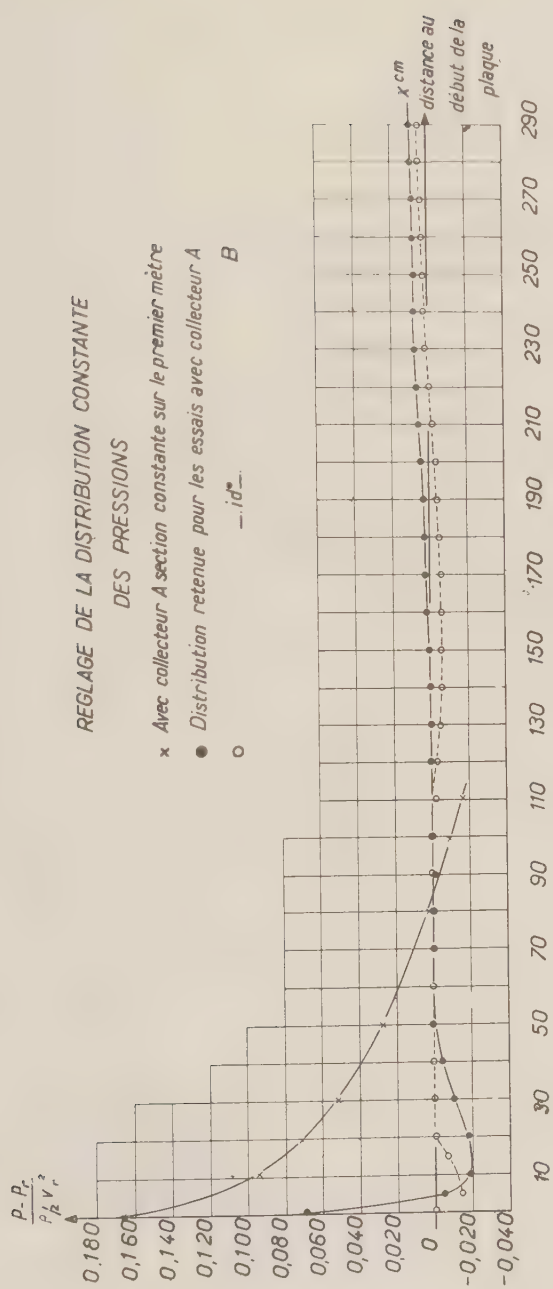
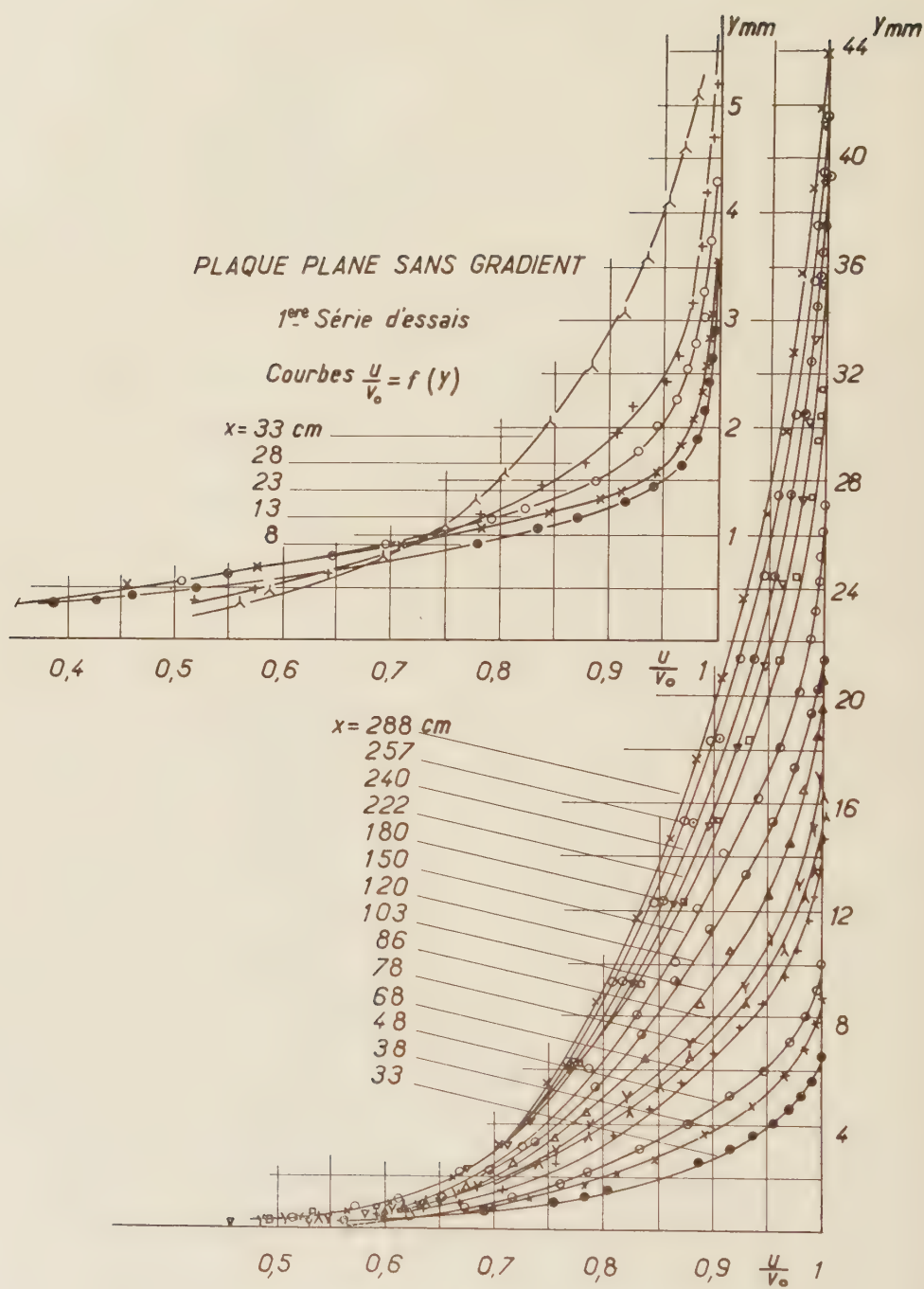


Fig. 39

Planches I à 23



Pl. 1

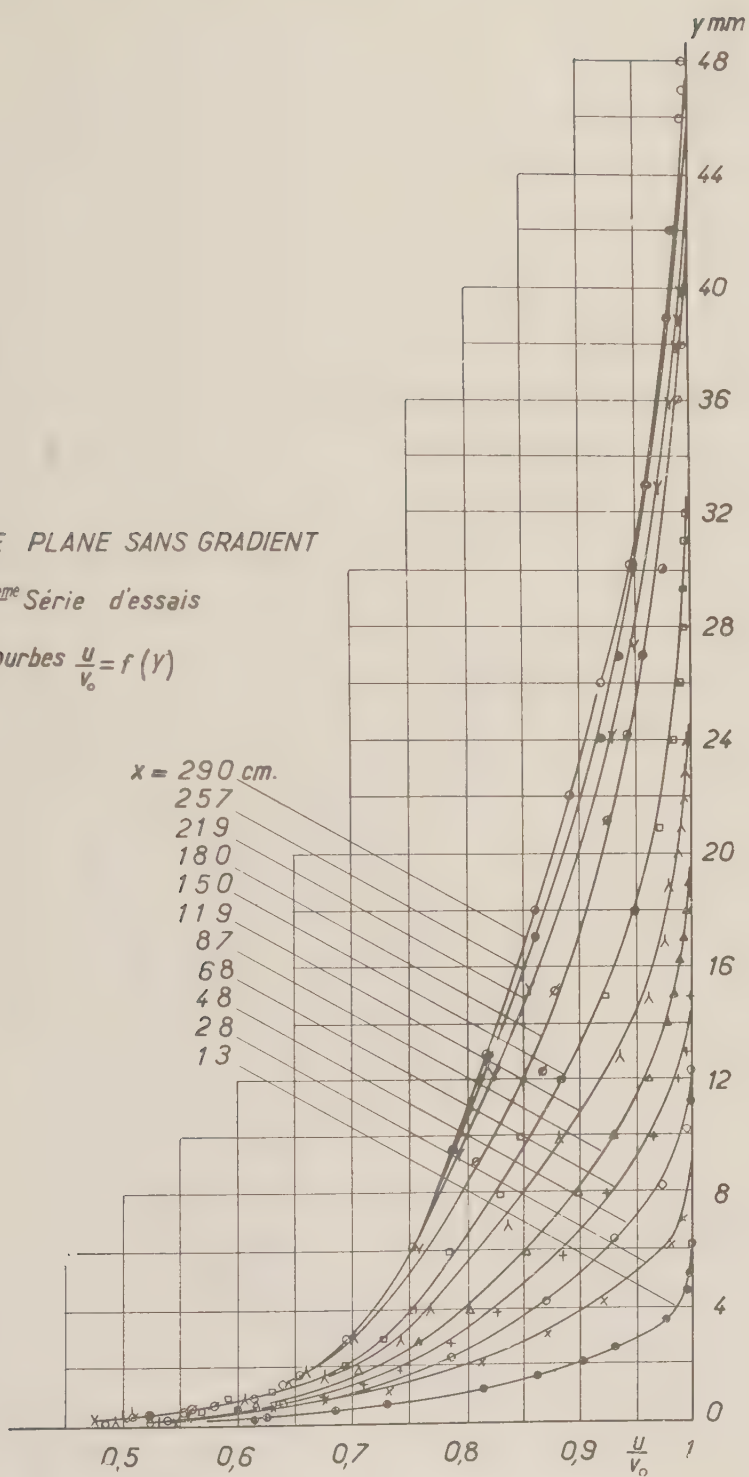


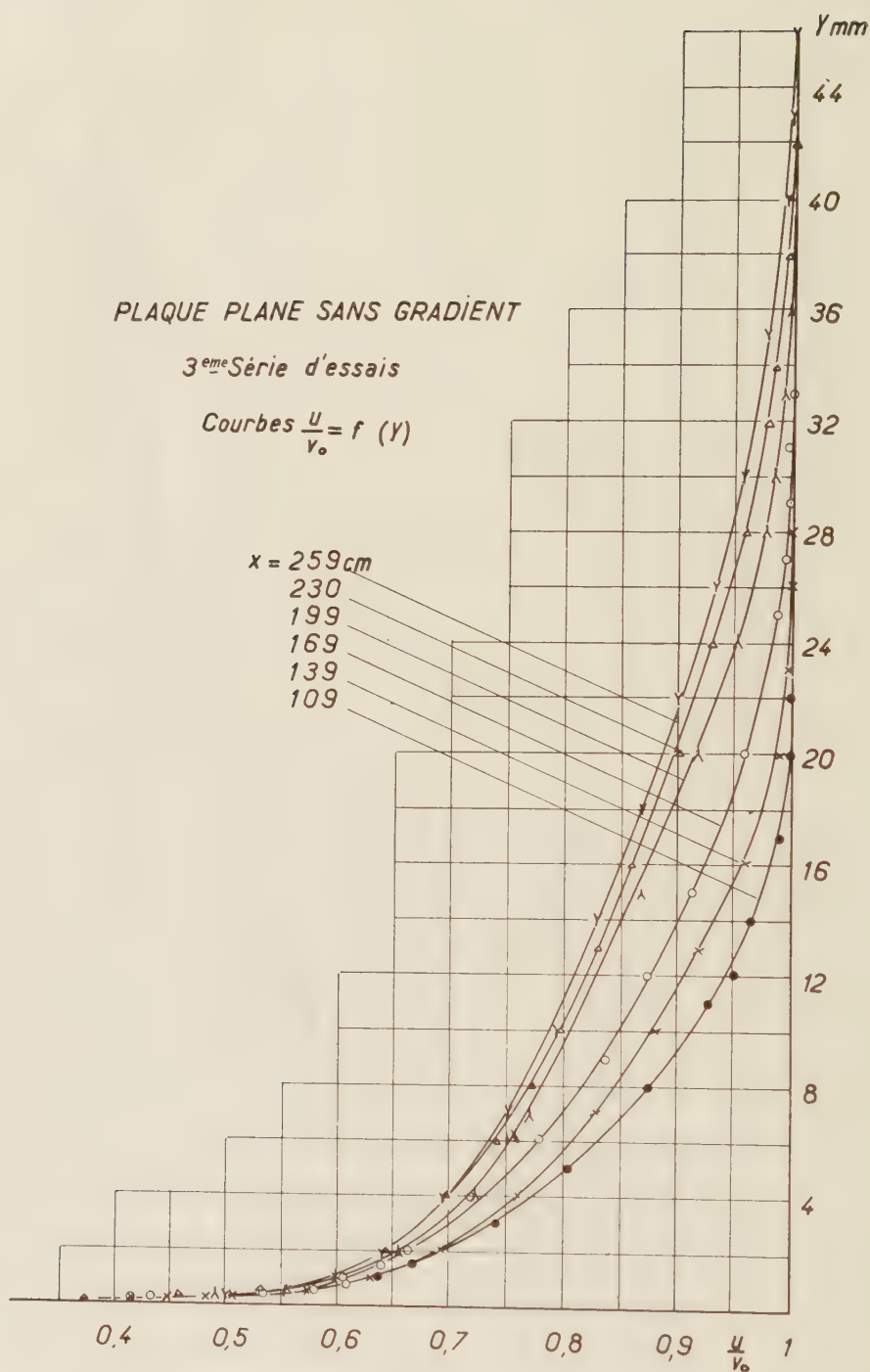
Pl. 2

PLAQUE PLANE SANS GRADIENT

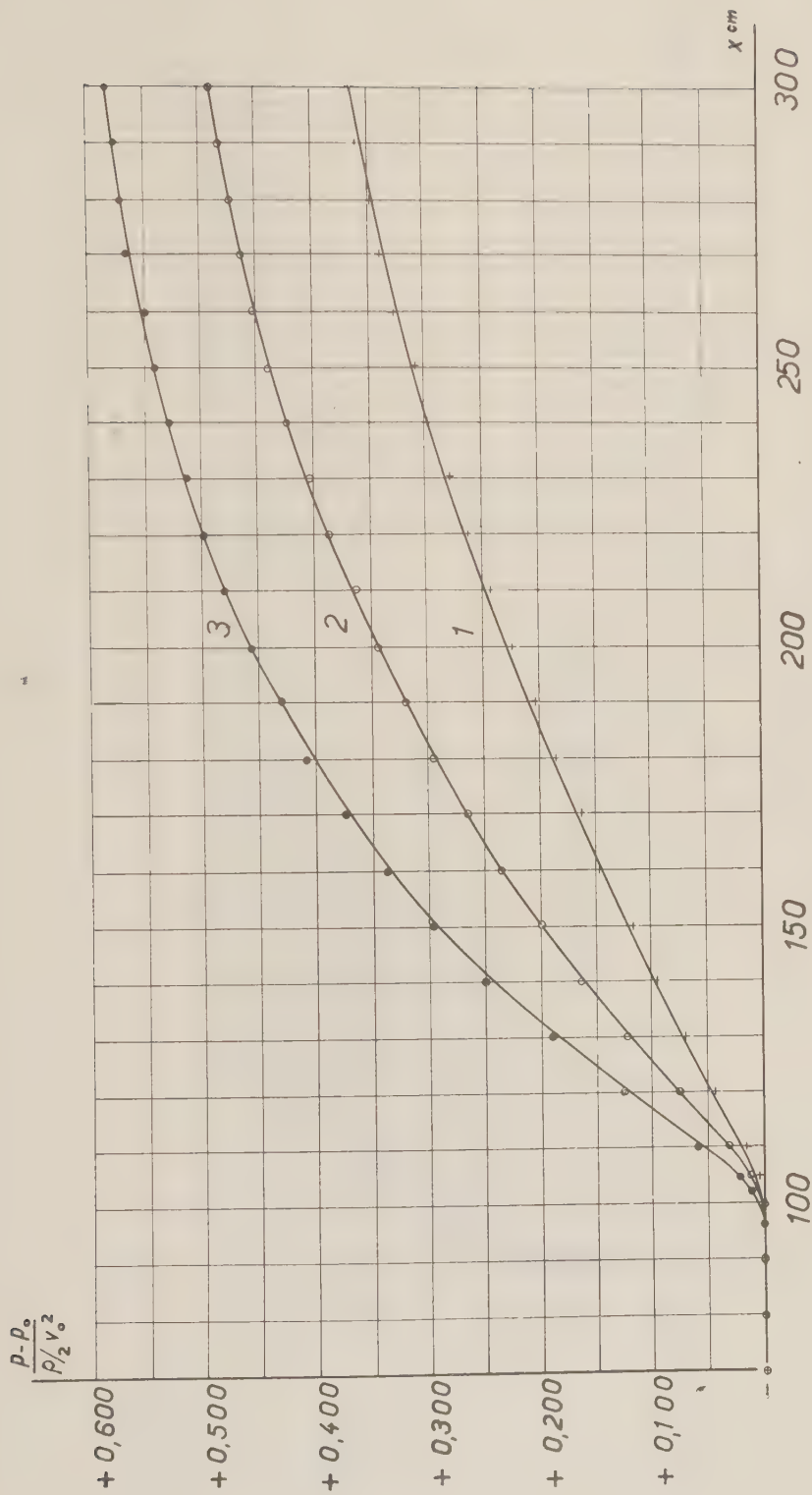
2^{ème} Série d'essais

Courbes $\frac{u}{v_0} = f(y)$

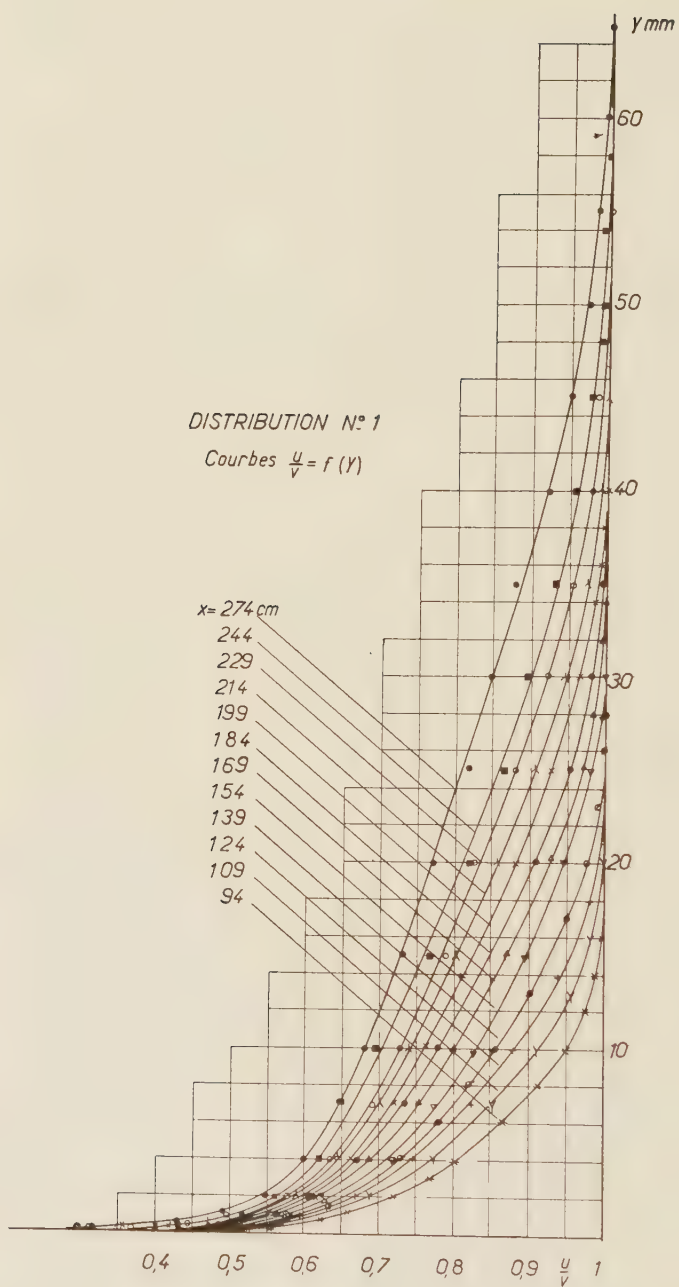




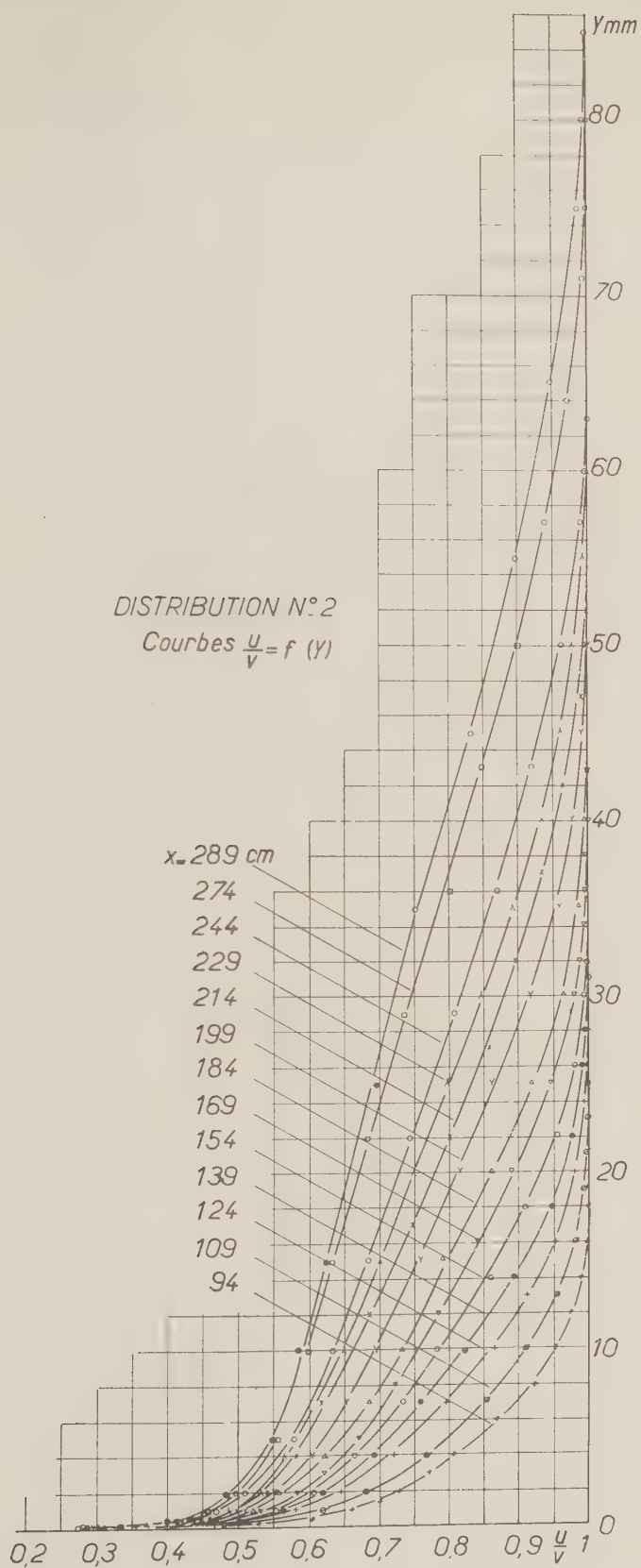
Pl. 4

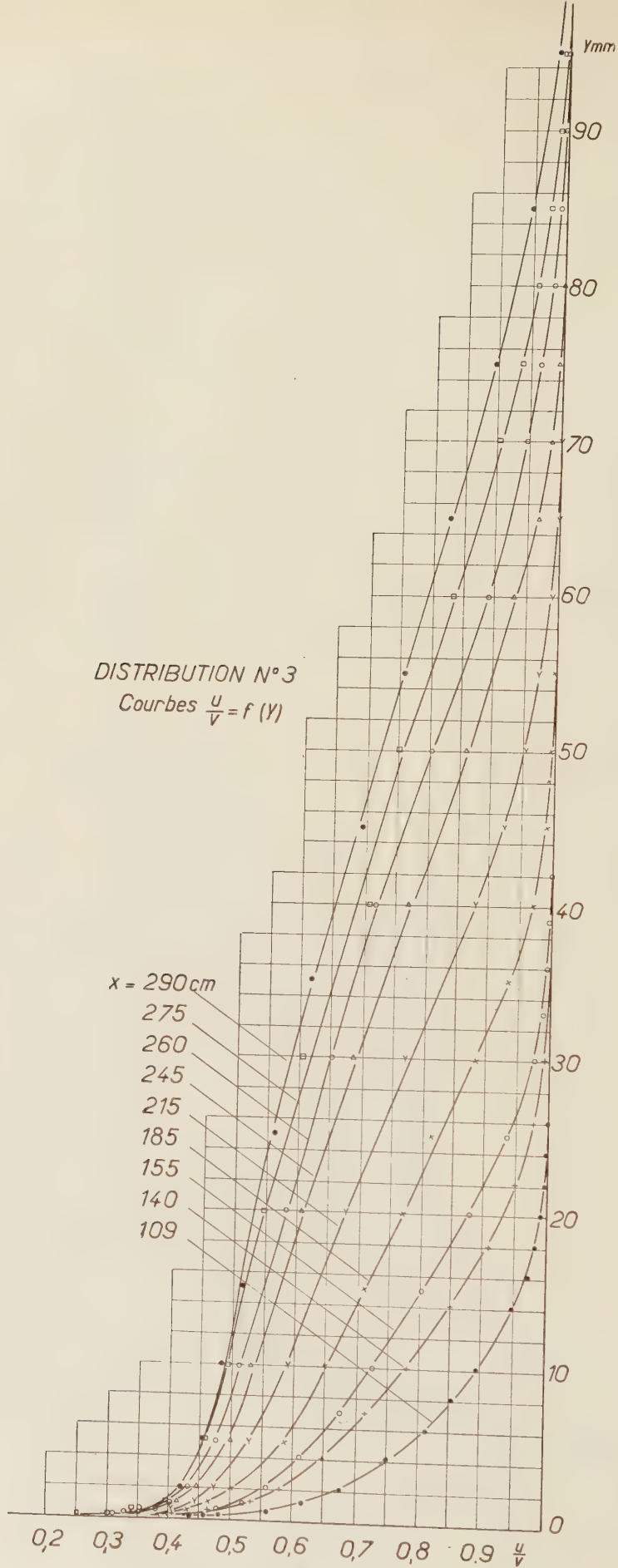


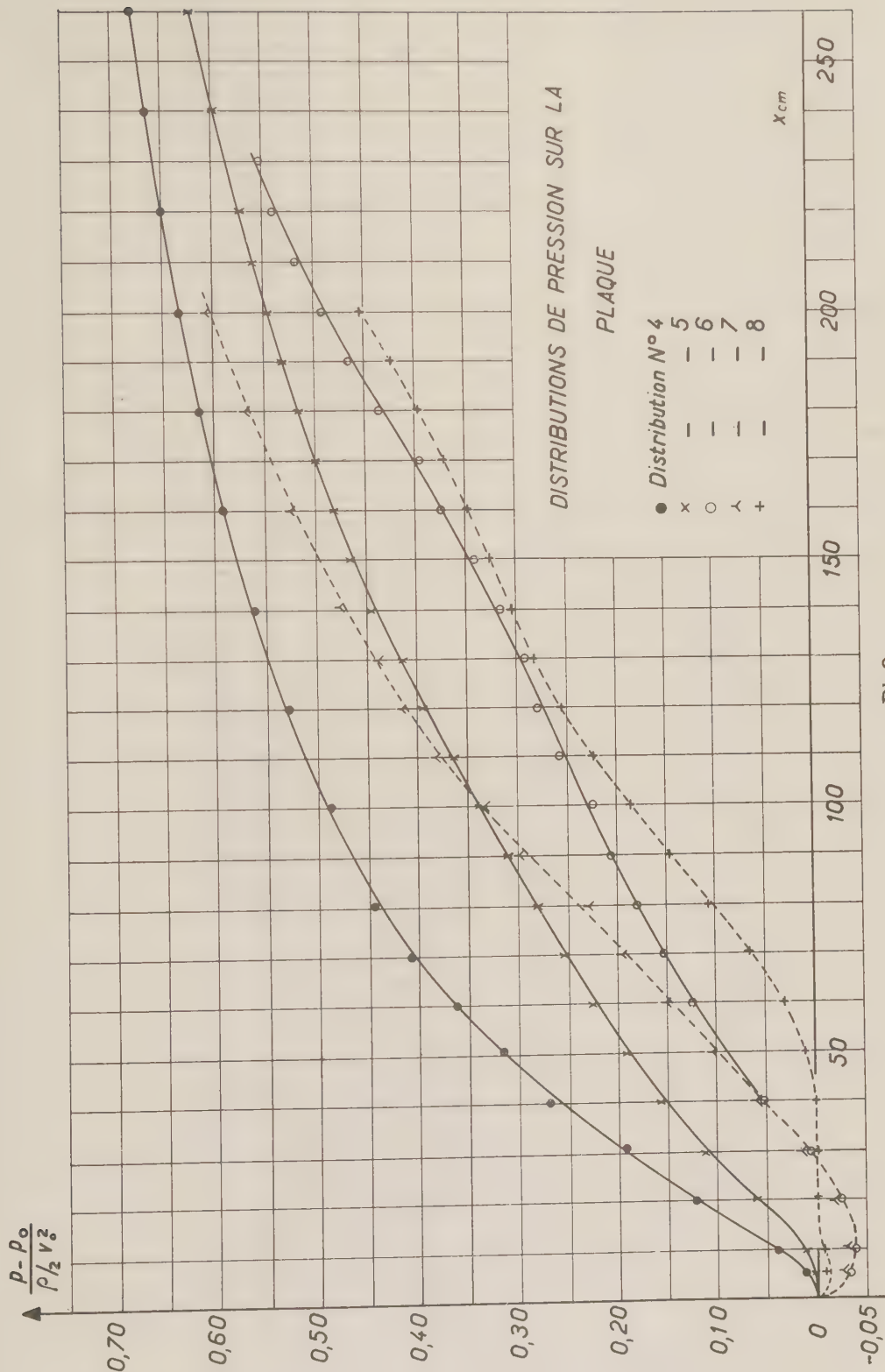
DISTRIBUTIONS DE PRESSION N° 1.2.3
Pl. 5

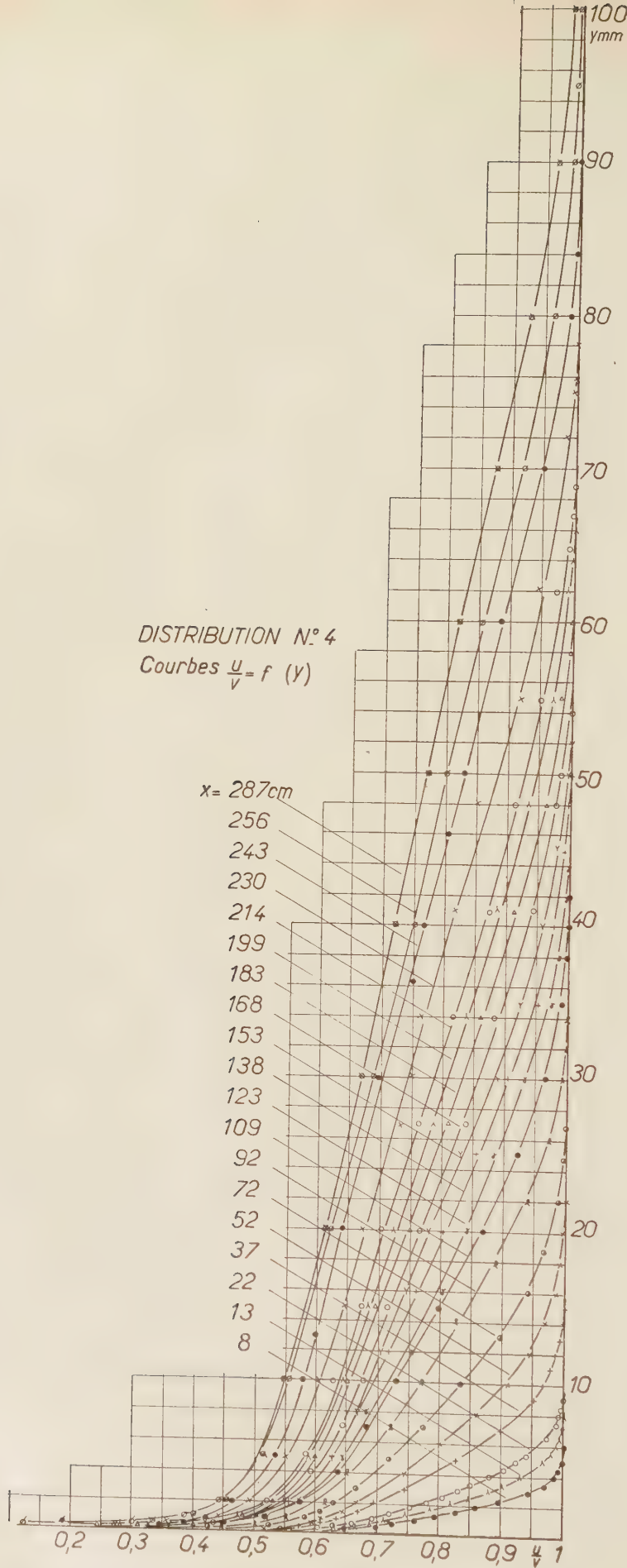


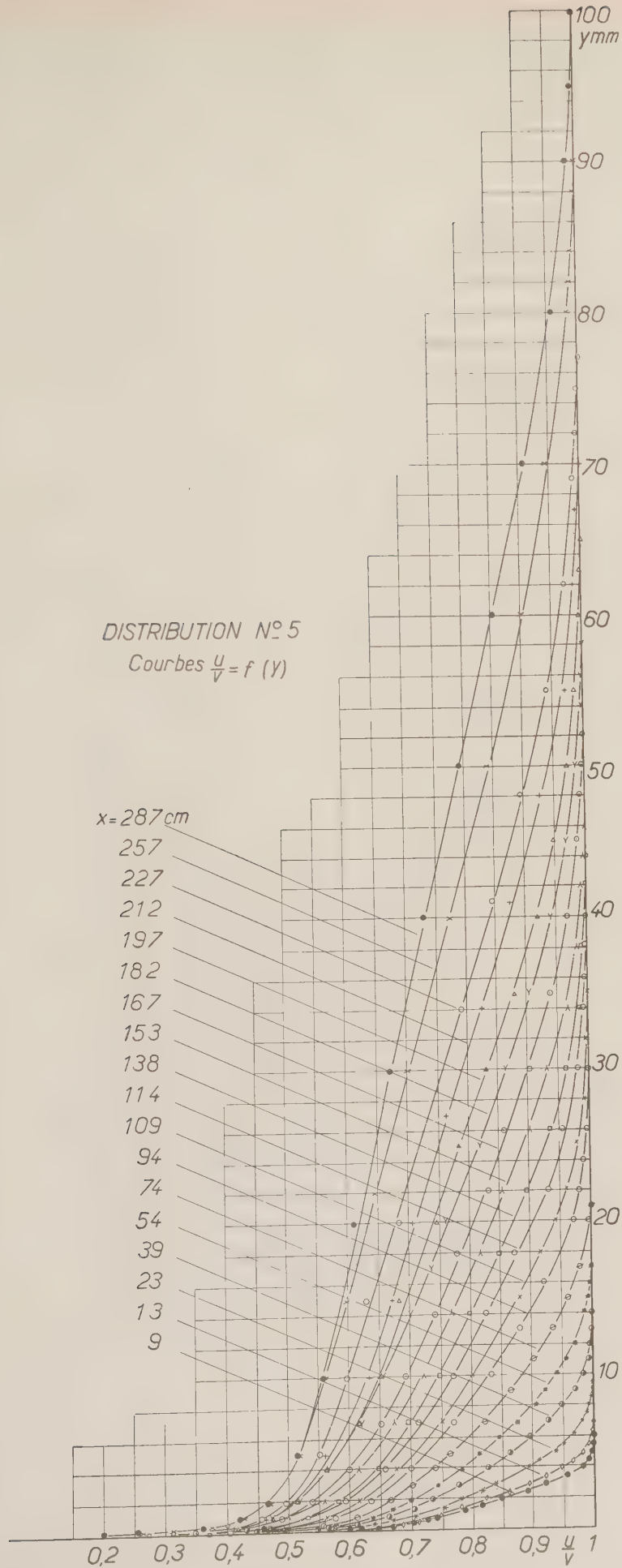
Pl. 6

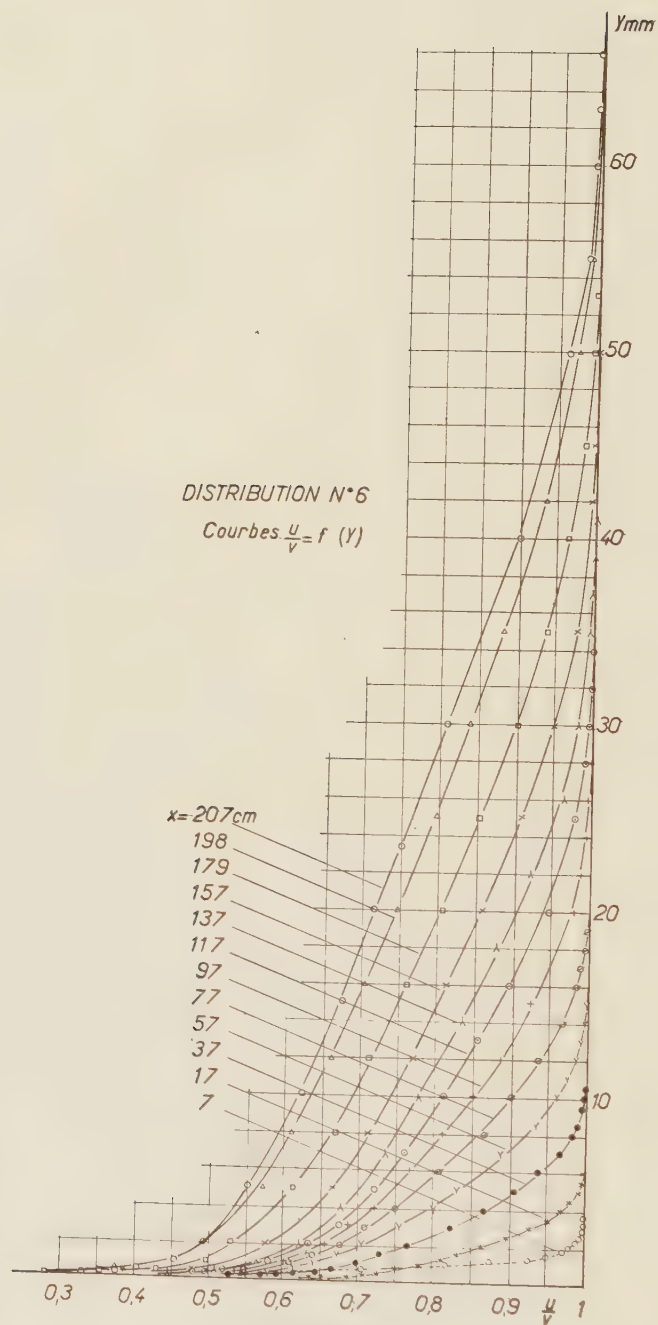




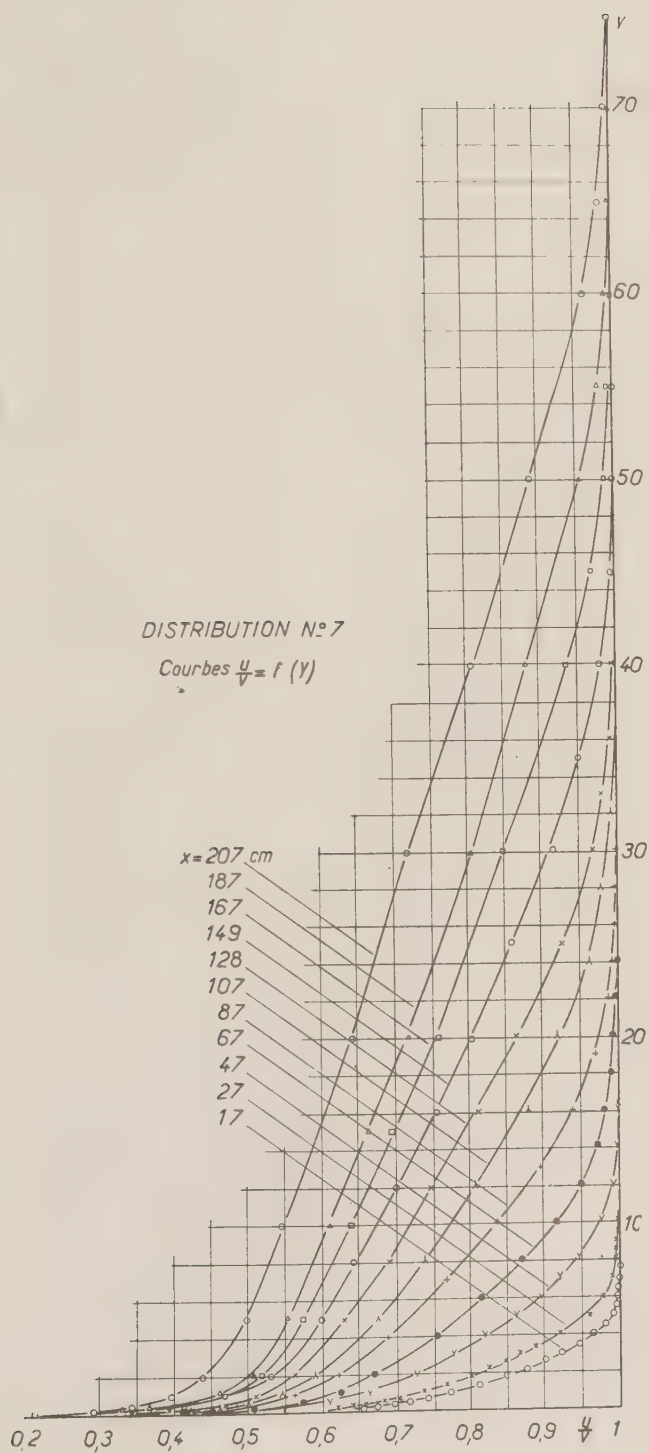


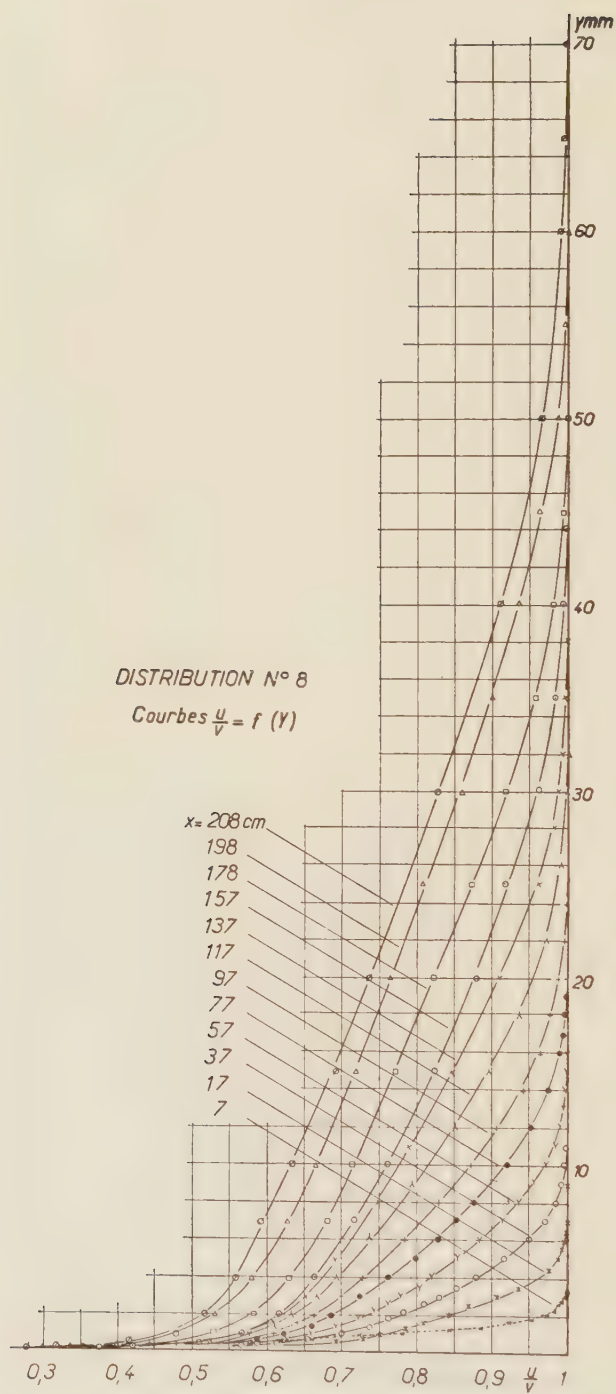




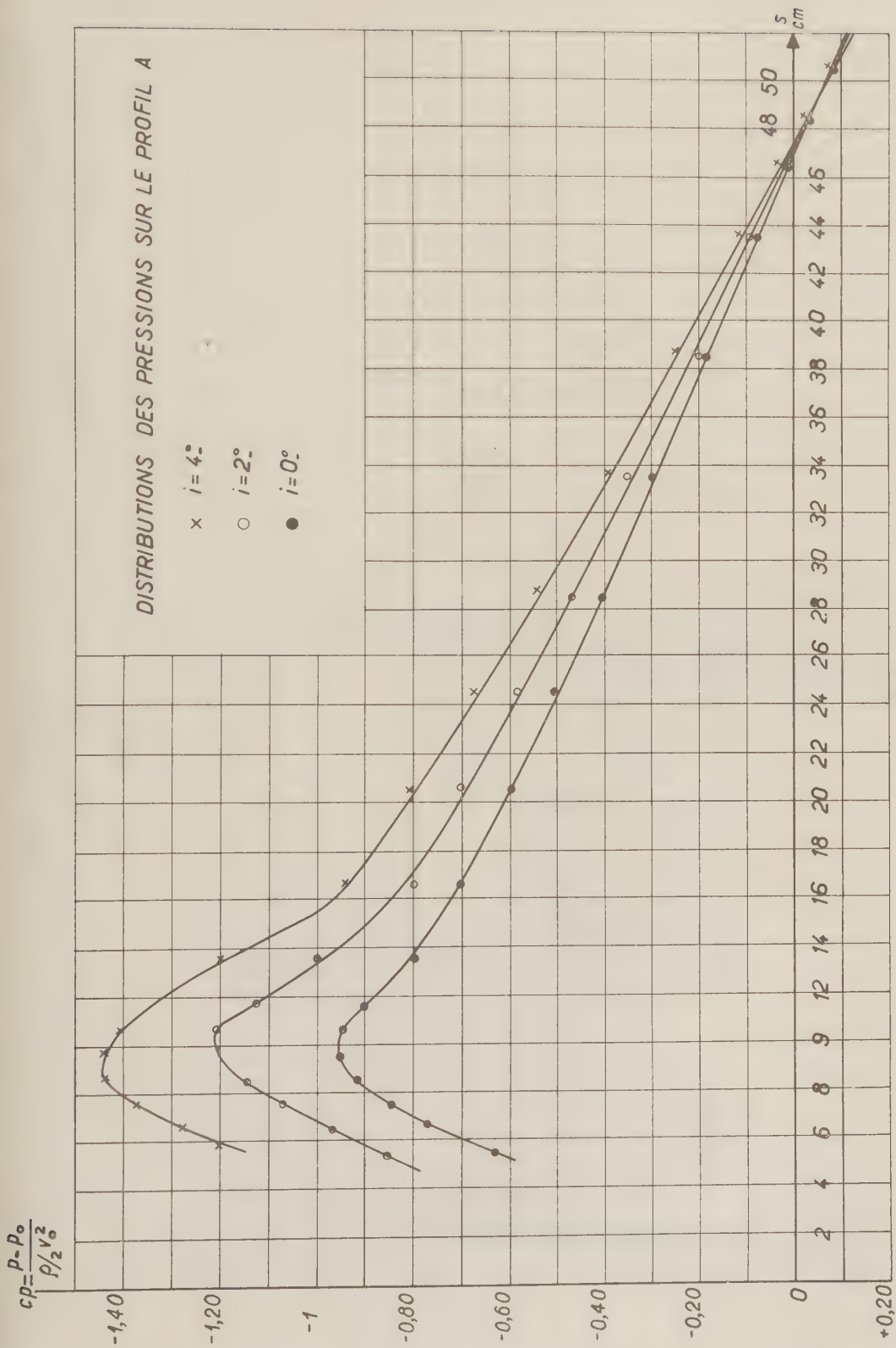


Pl. 12

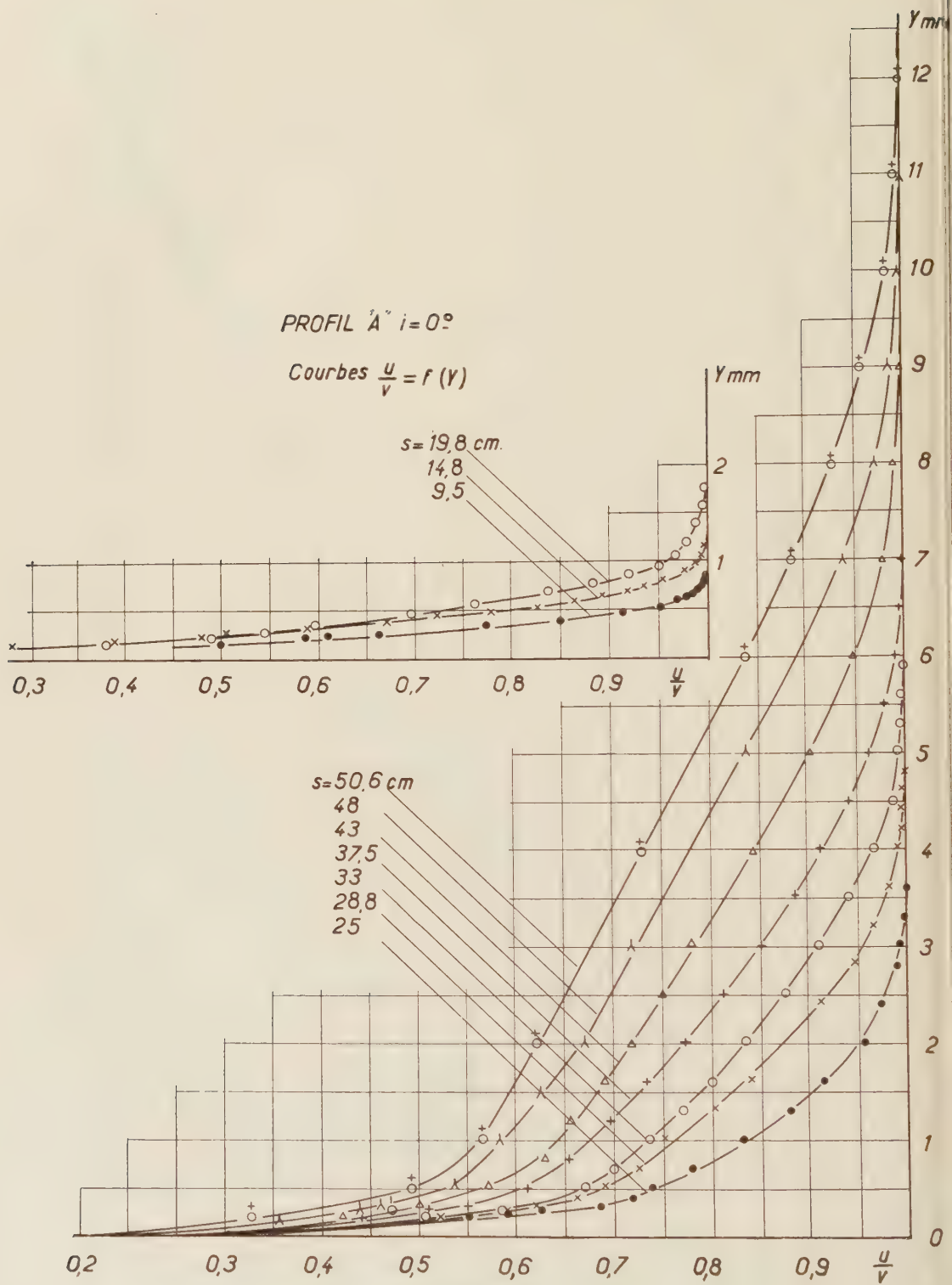




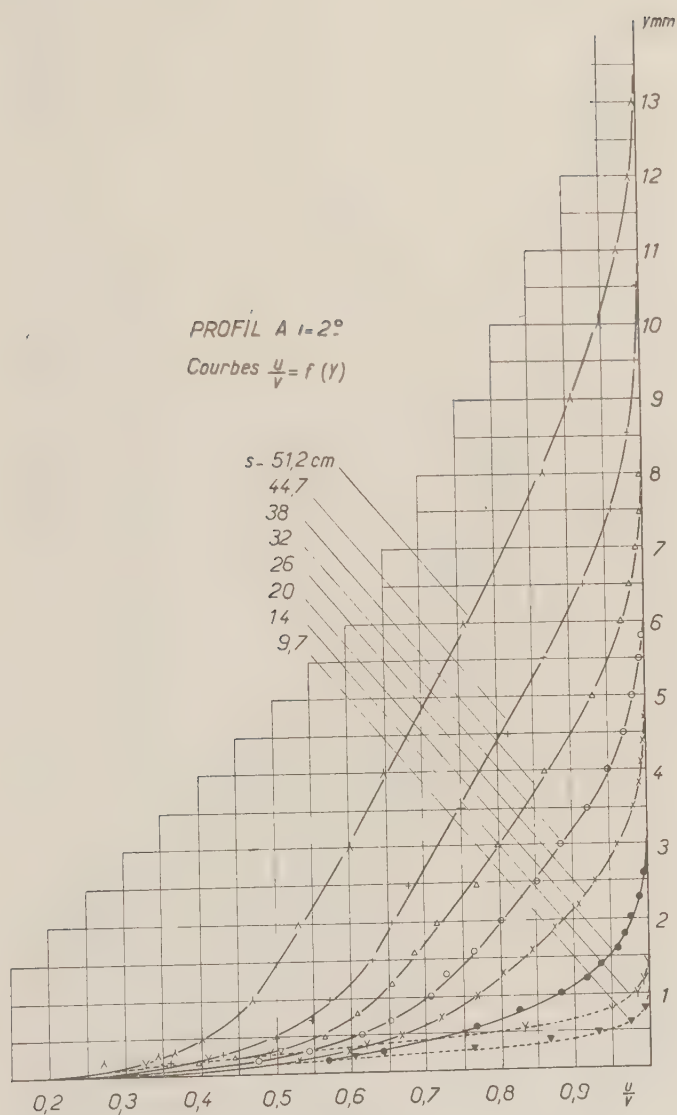
Pl. 14



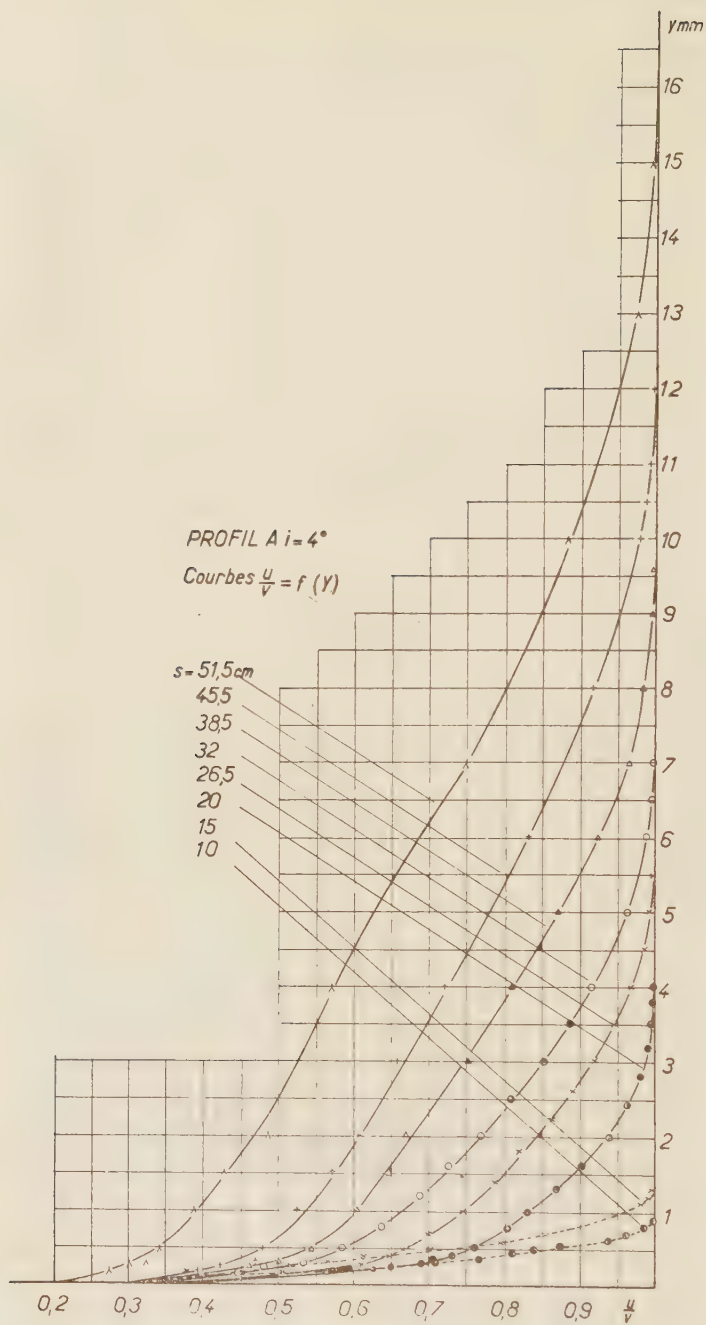
Pl. 15



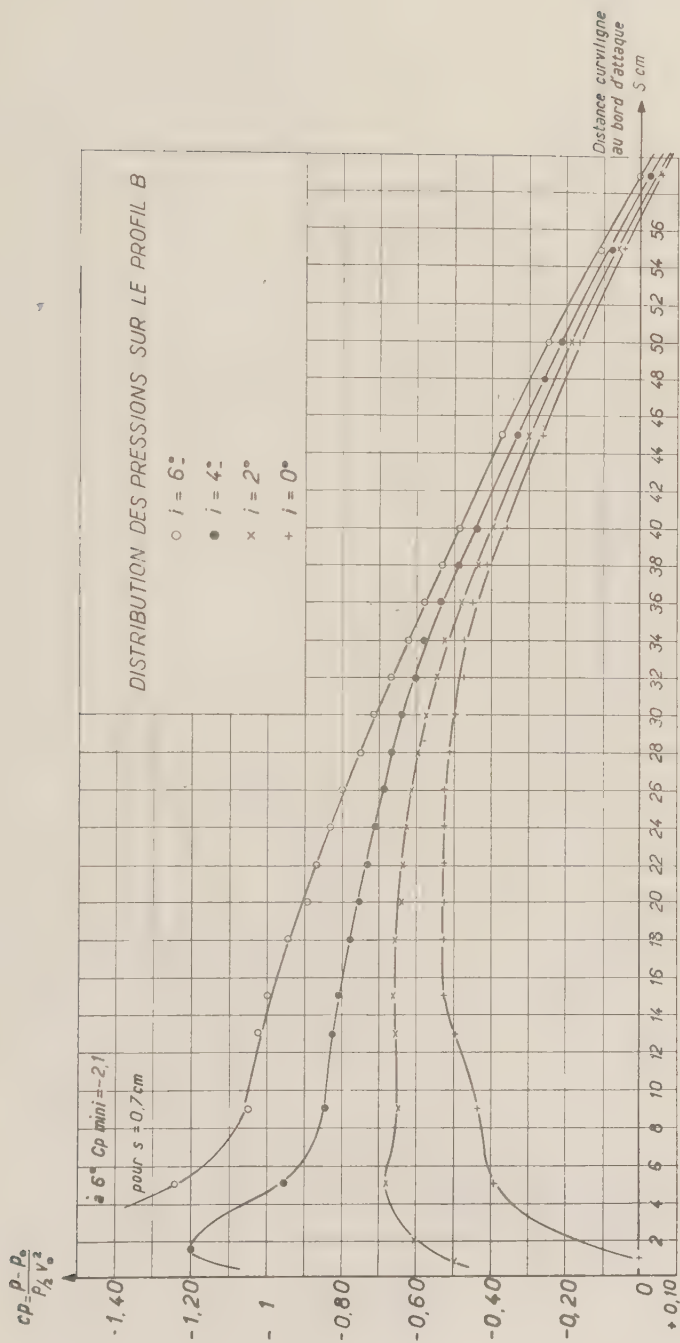
Pl. 16



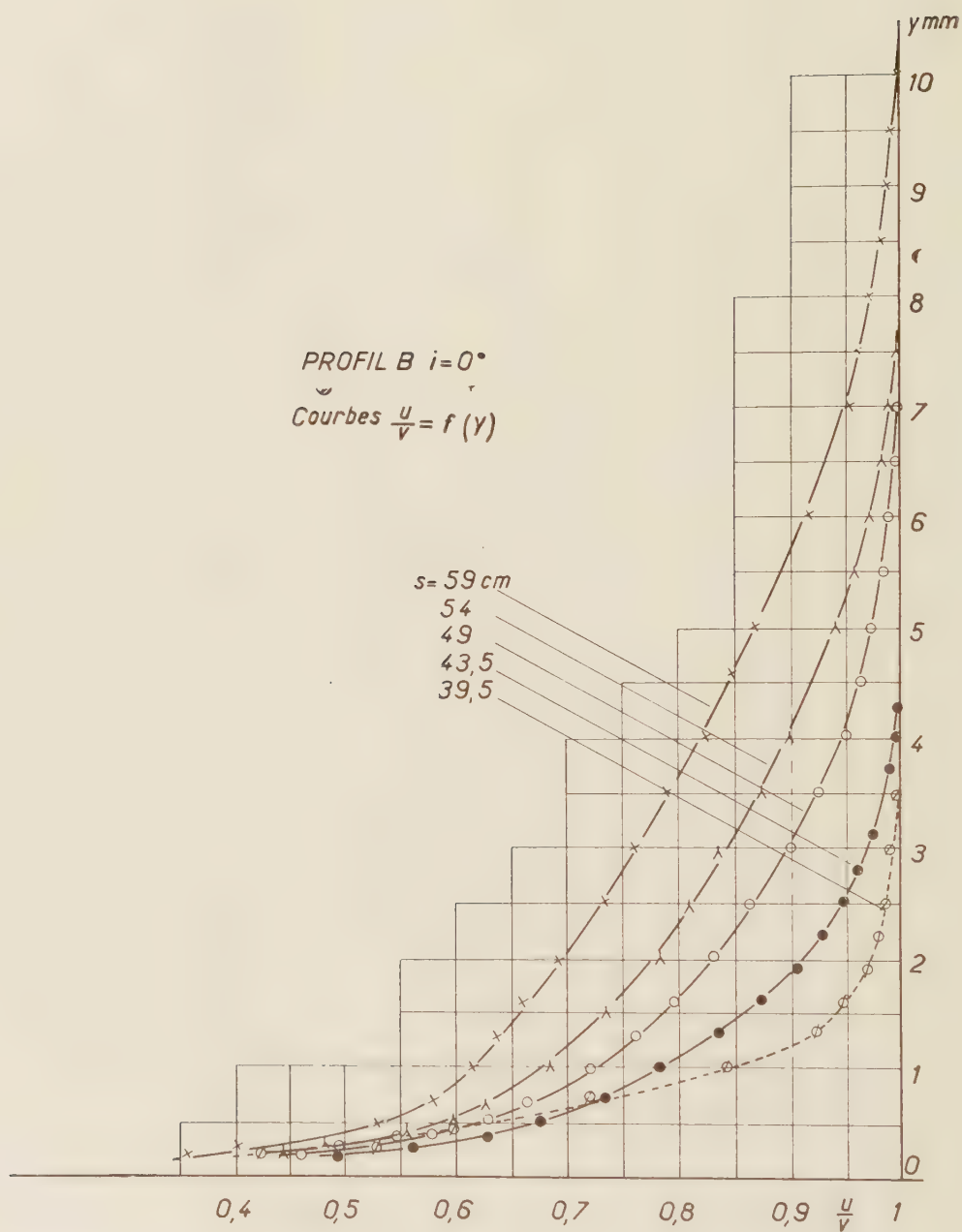
Pl. 17

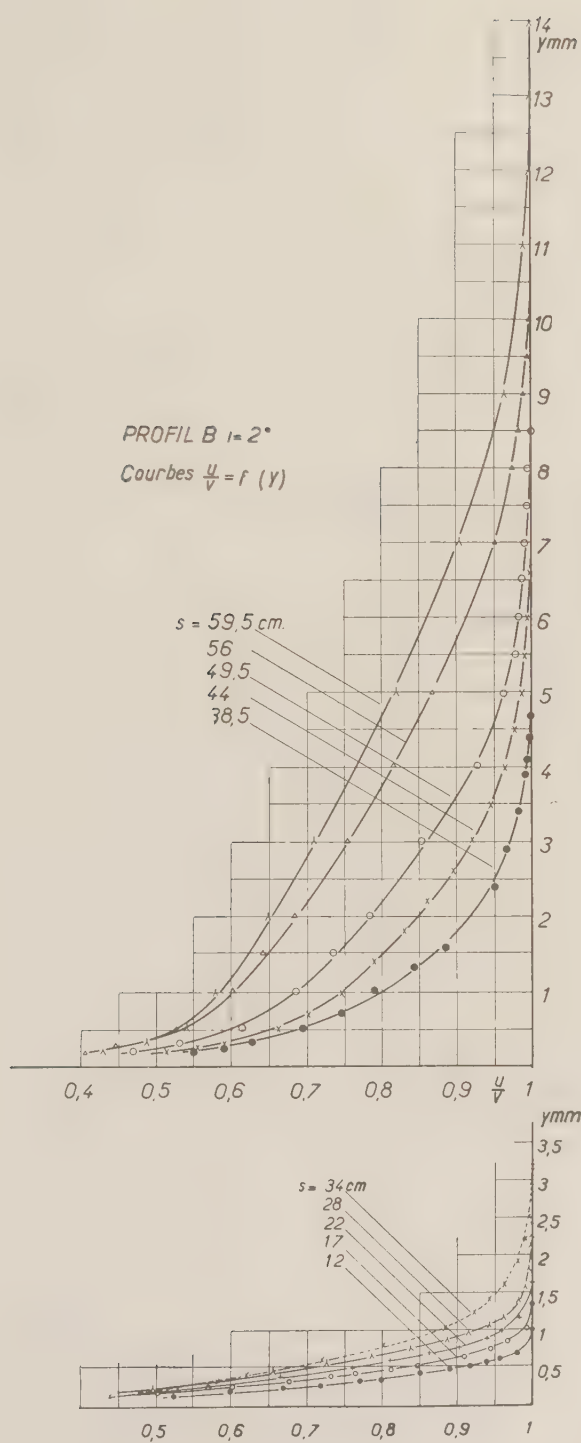


Pl. 18

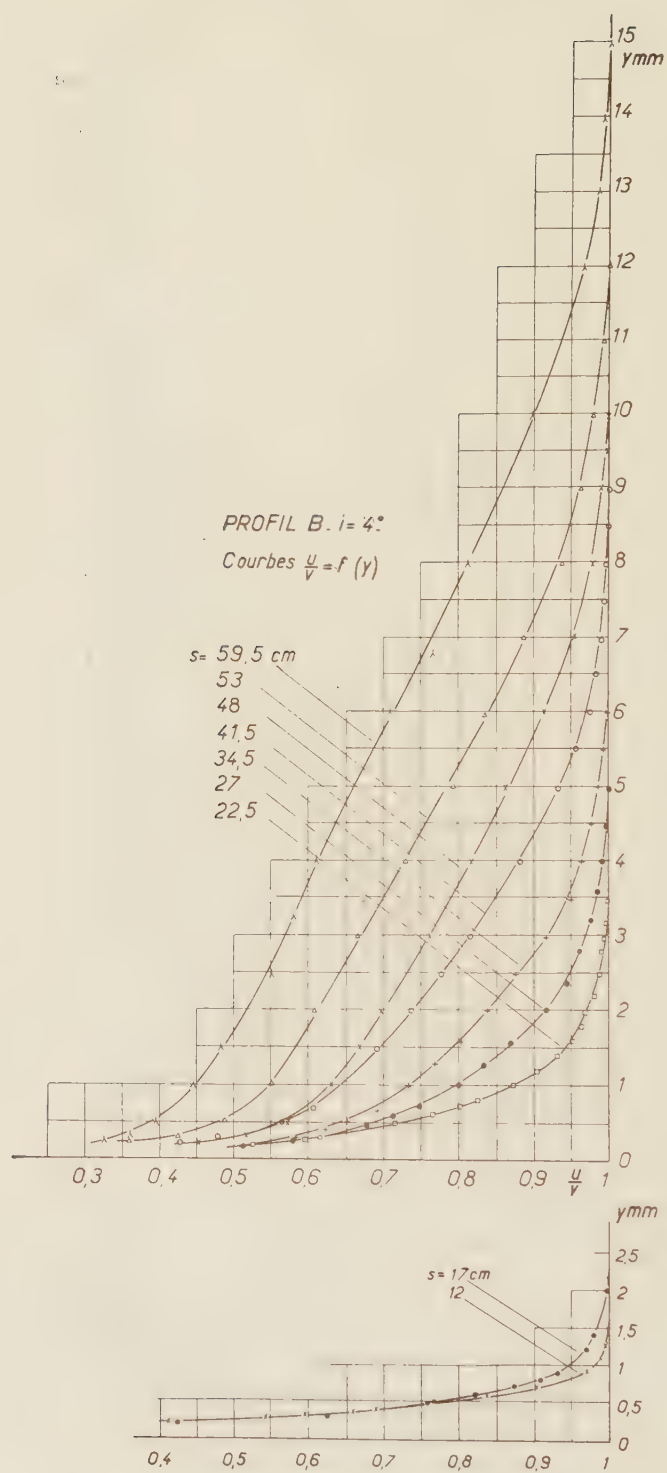


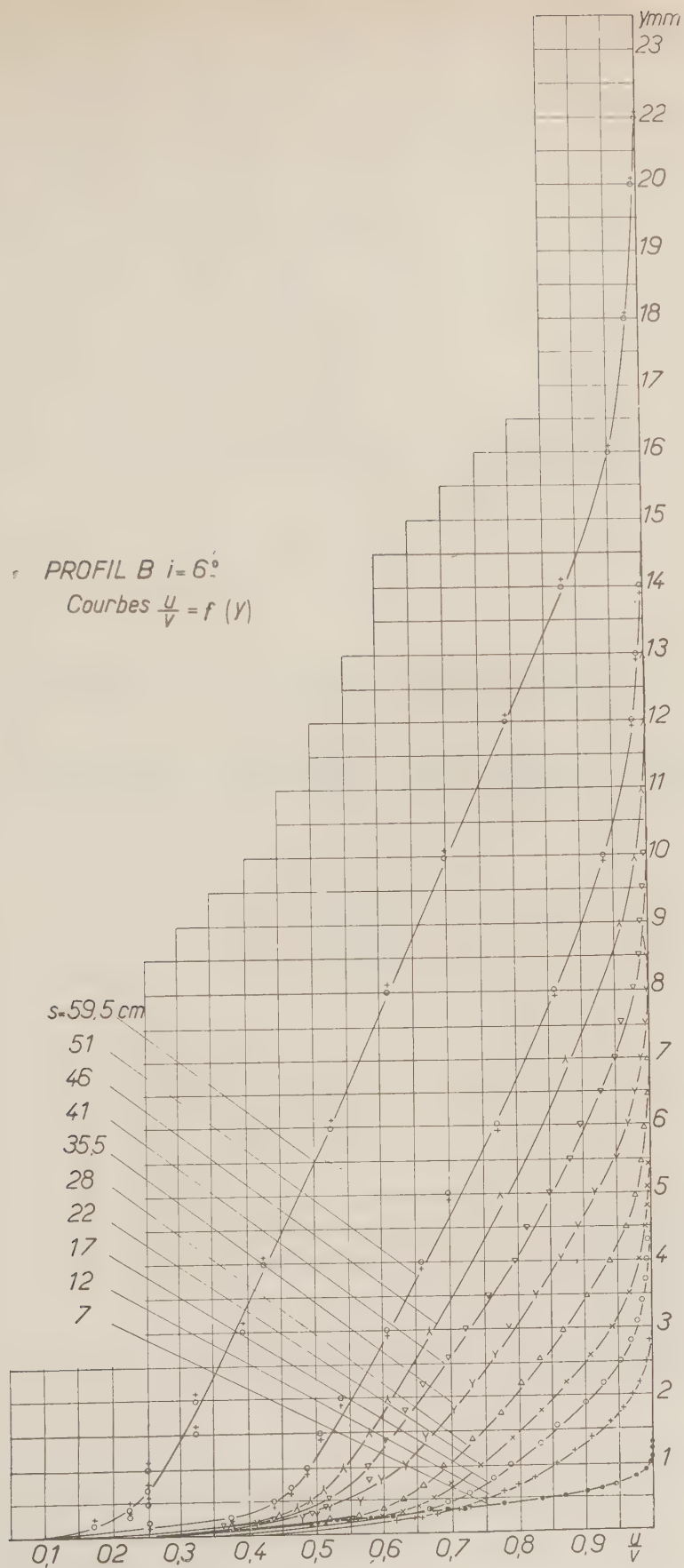
Pl. 19





Pl. 24





Pl. 23

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

CORRECTIONS D'EFFET BOUCHON EN SOUFFLERIES AÉRODYNAMIQUES

Vu et approuvé :

Paris, le 20 février 1950.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

A. CHATELET.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean SARRAILH.





IMPRIMERIE